HUNGARICA ACTA MATHEMATICA

AUCTORITATE

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

EDIDIT

E. EGERVÁRY

VOL. I., NO. 3

BUDAPESTINI

MCMXLVIII

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are published by the *Hungarian Academy of Sciences* in Budapest and edited by Prof. E. Egerváry (Budapest).

The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA will be issued in fascicles not tied to any fixed dates; 6 fascicles will go to a volume. The HUNGARICA ACTA MATHEMATICA are obtainable through all booksellers.

Manuscripts in a form ready for printing should be sent to Prof. E. Egerváry, Műegyetem rakpart 3., Budapest, XI. Only papers not published as yet elsewhere, written in English, French or German, and dealing with subjects belonging to the field of Mathematics or to neighbouring fields will be accepted for publication.

Of their papers to be published, authors will receive galley-proofs. Subsequent alterations of text, in so far as they exceed 10% of the typesetting cost, will be charged to the author.

Authors will receive 100 reprints of their papers free of cost.

THE ADMINISTRATION OF THE ACADEMY
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA, édités par *l'Académie Hongroise des Sciences* de Budapest, sont dirigées par E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest.

HUNGARICA ACTA MATHEMATICA apparaîssent périodiquement; six fascicules forment un volume. HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sont accessibles par chaque librairie.

Les manuscrits prêts à tirer en anglais, en français ou en allemand doivent être envoyés à M. E. Egerváry, professeur à l'Université de Budapest, Budapest, XI., Műegyetem rakpart 3.

Des oeuvres inédites du domaine des mathématiques et des sciences apparentées y seront admises.

Les auteurs reçoivent l'épreuve de leur ouvrage. Si les frais des changements ultérieurs du texte dépassent 10% des frais de composition, ils seront supportés par l'auteur.

Les auteurs reçoivent de leur ouvrage à titre gratuit 100 tirages.

L'ADMINISTRATION DE L'ACADÉMIE
Budapest, V., Akadémia-utca 2.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA werden durch die *Ungarische Akademie der Wissenschaften* in Budapest herausgegeben und von Prof. E. Egerváry (Budapest) redigiert.

Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA erscheinen zwangslos in Heften; 6 Hefte bilden einen Band. Die HUNGARICA ACTA MATHEMATICA sind durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Druckfertige Manuskripte sind an Prof. E. Egerváry, Budapest, IX., Műegyetem rakpart 3, zu senden. Aufgenommen werden Arbeiten in englischer, französicher oder deutscher Sprache aus dem Gebiet der Mathematik und aus den Nachbargebieten, die vorher nicht veröffentlicht wurden.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten eine Fahnenkorrektur. Nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Verfasser erhalten von ihren Arbeiten 100 Sonderdrucke unentgeltlich.

DIE GESCHÄFTSFÜHRUNG DER AKADEMIE
Budapest, V., Akadémia-utca. 2.

ÜBER DEN WERTVORRAT GEBROCHENER RATIONALER FUNKTIONEN IN KREISBEREICHEN.

Von Gyula SZ. NAGY,
MITGLIED DER AKADEMIE

1. Ein Kreis K der komplexen Ebene bedeutet eine Kreislinie oder Gerade. Der Kreisbereich (K) ist der geschlossene Bereich, dessen Rand der Kreis K ist. Ist K eine Kreislinie, so werden wir den Innenbereich bzw. den Aussenbereich von K mit $(K)_-$ bzw. $(K)_+$ bezeichnen.

Wir nehmen von der rationalen Funktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n} \tag{1}$$

an, dass die Polynome $f(z)$ und $g(z)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die rationale Funktion $F(z)$ hat den *Grad* n, wenn $|a_n| + |b_n| \neq 0$ ist. Die rationale Funktion $F(z)$ ist *vollständig*, wenn jede der $n+1$ Zahlen

$$|a_h| + |b_h| \quad (h = 0, 1, \ldots, n) \tag{2}$$

positiv ist. Widrigenfalls hat $F(z)$ *Lücken*. Die Anzahl $p+1$ der positiven Zahlen in der Folge (2) ist die Gliedanzahl der Funktion $F(z)$.

Die Z-Stellen der rationalen Funktion $F(z)$ sind die Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned} P(z) = f(z) - Z\,g(z) = a_0 - Zb_0 + (a_1 - Zb_1)\,z + \ldots + \\ + (a_n - Zb_n)\,z^n . \end{aligned} \tag{3}$$

Die rationale Funktion (1) nimmt an der Stelle $z = \infty$ den singulären Wert $Z = \frac{a_n}{b_n}$ an. Mit der Ausnahme des singulären Wertes nimmt die rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades jeden anderen Wert in n (verschiedenen oder teils zusammenfallenden) endlichen Stellen an.

Es gilt der Satz

I. *Ist*

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}\,, \quad a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0 \tag{4}$$

und wird ein den Nullpunkt (im Innern oder am Rande) enthaltender Kreisbereich (k) der komplexen z-Ebene durch die Transformation

$$Z = F(z) \text{ bzw. } Z = \frac{n a_0 + a_1 z}{n b_0 + b_1 z}$$

auf den Bereich B bzw. (K_n) der Z-Ebene abgebildet, so ist der Kreisbereich (K_n) ein Teilbereich von B.

Man kann mit einem von L. Fejér herrührenden Beweisgang[1] den Satz I auf folgende Weise verschärfen:

II. *Hat die rationale Funktion $F(z)$ n-ten Grades die Form*

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^{n_2} + \ldots + a_p z^{n_p}}{b_0 + b_1 z + b_2 z^{n_2} + \ldots + b_p z^{n_p}}, \tag{5}$$

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0, \ 1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p = n,$$

ist

$$q = \frac{n_2}{n_2 - 1} \frac{n_3}{n_3 - 1} \cdots \frac{n_p}{n_p - 1}, \tag{6}$$

und bezeichnet B, (K_p) bzw. (K_q) in der Z-Ebene den Bereich, auf den ein den Nullpunkt enthaltender Kreisbereich (k) der z-Ebene durch die Transformation

$$Z = F(z), \ Z = \frac{p a_0 + a_1 z}{p b_0 + b_1 z} \text{ bzw. } Z = \frac{q a_0 + a_1 z}{q b_0 + b_1 z} \tag{7}$$

abgebildet wird, so enthält der Bereich B den Kreisbereich (K_p) bzw. (K_q) in sich.

Die Sätze I und II lassen sich auch auf folgende Weise ausdrücken:

Bezeichnet Z einen beliebigen Punkt des Kreisbereiches (K_n), (K_p) bzw. (K_q), so besitzt die rationale Funktion (5) im Kreisbereich (k) mindestens eine Z-Stelle.

Aus der Definition der Zahl q folgt, dass $q \leq p \leq n$ ist, weil $n_h \geq h$ und deshalb $\frac{n_h}{n_h - 1} \leq \frac{h}{h-1}$ $(h = 2, 3, \ldots, p)$ sind.

Für den Fall $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$ gilt der Satz

III. *Sind*

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^{n_2} + \ldots + a_p z^{n_p}}{b_0 + b_1 z + b_2 z^{n_2} + \ldots + b_p z^{n_p}},$$

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0, \ a_0 b_0 a_1 b_1 \neq 0, \ 1 < n_2 < n_3 \ldots < n_p = n,$$

[1] *Fejér L.*, Über die Kreisgebiete in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt, Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung 26 (1917), S. 114—128.

so nimmt die rationale Funktion $F(z)$ in einem den Nullpunkt und den Punkt

$$-n\frac{a_0}{a_1}\,,\ \textit{oder}\ -p\frac{a_0}{a_1}\,,\ \textit{oder}\ -q\frac{a_0}{a_1}\ \left(q=\frac{n_2}{n_2-1}\,\frac{n_3}{n_3-1}\cdots\frac{n_p}{n_p-1}\right)$$

enthaltenden beliebigen Kreisbereich (k) der z-Ebene jeden Wert an.

Wir werden in dieser Arbeit noch andere ähnliche Sätze beweisen.

2. Zum Beweis der Sätze I—III zeigen wir erst den folgenden geometrischen Hilfssatz:

Enthält ein Kreisbereich (k) das Punktpaar ζ und ζ', so enthält er mindestens einen Kreisbereich (k') mit den Randpunkten ζ und ζ'.

Stimmt (k) mit der Kreisscheibe $|z-z_0|\leq r$ überein, so sind $|\zeta-z_0|=\varrho\leq r$ und $|\zeta'-z_0|=\varrho'\leq r$. Ist nun $\varrho=\varrho'$, so ist die Kreisscheibe $|z-z_0|\leq\varrho$ ein Kreisbereich (k') von der gewünschten Eigenschaft. Im Falle $\varrho>\varrho'$ begrenzt der Kreis k', der durch den Punkt ζ geht und den Kreis $|z-z_0|=\varrho$ im Punkte ζ (vom innen) berührt, eine gewünschte Kreisscheibe (k').

Damit ist der Hilfssatz bewiesen, weil jeder Kreisbereich durch eine geeignete lineare Transformation sich auf eine Kreisscheibe abbilden lässt.

Wir werden die Sätze I—III durch Anwendung des folgenden bekannten Satzes[2] von E. Laguerre beweisen:

Ist ζ keine Nullstelle des Polynoms n-ten Grades

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n,$$

so trennt jeder Kreis k durch das Punktpaar

$$\zeta\ \textit{und}\ \zeta'=\zeta-n\frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)}\,, \tag{8}$$

oder durch den Punkt ζ und durch irgendeine Nullstelle ζ_h des Polynoms

$$Q(z)=n\,P(z)+(\zeta-z)\,P'(z) \tag{9}$$

die Nullstellen des Polynoms $P(z)$. D. h.: beide von k begrenzten Kreisbereiche enthalten mindestens je eine Nullstelle des Polynoms $P(z)$ im Innern, oder sämtliche Nullstellen von $P(z)$ liegen auf dem Kreise k.

Der erste Teil dieses Laguerre-schen Satzes bleibt auch dann gültig, wenn $c_n=c_{n-1}=\ldots=c_{m+1}=0$ und $c_m\neq 0$ sind. Dann stimmen die endlichen Nullstellen des Polynoms $P(z)$ n-ten Grades mit den Nullstellen des Polynoms m-ten Grades

[2] *Laguerre E.*, Oeuvres de Laguerre I, 48—66, 133—143. — *Pólya G.—Szegő G.*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, 55—64, 243—247.

$$P_0(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m$$

überein.

Ist nämlich (k) eine Kreisscheibe mit den Randpunkten ζ und ζ', so enthält sie den Punkt

$$\zeta_0' = \zeta - m \cdot \frac{P_0(\zeta)}{P_0'(\zeta)} = \zeta - m. \frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)}$$

und damit auch die Kreisscheibe (k_0), wenn k_0 durch ζ_0' geht und den Kreis k in ζ berürt. Das Innere von $(k)_-$ enthält also mindestens eine endliche Nullstelle von $P(z)$. Der Bereich $(k)_+$ enthält mindestens die Nullstelle $z = \infty$ von $P(z)$ im Innern.

Ist k eine Gerade, so fällt sie mit der Geraden k_0 zusammen, weil sie durch die Punkte ζ, ζ' und ζ_0' geht. Die Gerade k trennt also die endlichen Nullstellen von $P(z)$.

Damit haben wir gezeigt, dass der erste Teil des Laguerre-schen Satzes auch für den Fall $m < n$ giltig ist.

Der zweite Teil des Laguerre-schen Satzes gilt auch für den Fall $\zeta_1' = \infty$. Dann ist ζ der Schwerpunkt der endlichen Nullstellen des Polynoms $P(z)$.

3. Wendet man den ersten Teil des Laguerre-schen Satzes im Falle $\zeta = 0$ auf das Polynom (3) an, so erhält man, dass die Nullstellen des Polynoms $f(z) - Z \cdot g(z)$, d. h. die Z-Stellen der rationalen Funktion $F(z)$ von jedem durch die Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta' = -n \dfrac{a_0 - Zb_0}{a_1 - Zb_1}$ gehenden Kreis getrennt werden.

Aus der linearen Transformation

$$Z = \frac{n\, a_0 + a_1 z}{n\, b_0 + b_1 z}, \quad z = -n \frac{a_0 - Zb_0}{a_1 - Zb_1}$$

folgt, dass ζ' ein Punkt des Kreisbereiches (k) ist, wenn Z im Bereich (K_n) liegt.

Nach dem geometrischen Hilfssatz enthält der Bereich (k) des Satzes I einen Kreisbereich (k') mit den Randpunkten $\zeta = 0$ und ζ'. Dieser Bereich (k') und damit auch der Bereich (k) enthält also mindestens eine Z-Stelle der Funktion $F(z)$.

Damit ist der Satz I bewiesen.

4. Zum Beweis des Satzes II wenden wir im Falle $\zeta = 0$ den zweiten Teil des Laguerre-schen Satzes auf das $(p + 1)$-gliedrige Polynom

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^{n_2} + \ldots + c_p z^{n_p}, \quad c_0 c_1 \neq 0,$$

$$1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_p = n$$

an. Dann hat das Polynom (9) die Form

$$Q(z) = n_p P(z) - z P'(z) = n_p c_0 + (n_p - 1) c_1 z + (n_p - n_2) c_2 z^{n_2} + \\ + \ldots + (n_p - n_{p-1}) c_{p-1} z^{n_p - 1}. \tag{10}$$

Die Nullstellen des $(p+1)$-gliedrigen Polynoms $P(z)$ werden nach Satz von Laguerre von jedem Kreis k_1 durch den Nullpunkt und durch eine Nullstelle des p-gliedrigen Polynoms (10) getrennt. Dasselbe gilt für einen beliebigen Kreis k_2, der durch den Nullpunkt und durch eine Nullstelle des $(p-1)$-gliedrigen Polynoms

$$Q_1(z) = n_{p-1} Q(z) - z Q'(z) = n_p n_{p-1} c_0 + (n_p - 1)(n_{p-1} - 1) c_1 z + \\ + (n_p - n_2)(n_{p-1} - n_2) c_2 z^{n_2} + \ldots \\ + (n_p - n_{p-2})(n_{p-1} - n_{p-2}) c_{p-2} z^{n_p - 2}$$

geht. Das Polynom (10) besitzt nämlich in beiden von k_2 begrenzten Bereichen mindestens je eine Nullstelle. Beide Kreisbereiche enthalten mindestens je eine Nullstelle des Polynoms $P(z)$, weil sie je einen Kreisbereich enthalten, dessen Rand durch den Nullpunkt und durch eine Nullstelle des Polynoms $Q(z)$ geht.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man einsehen, dass das $(p+1)$-gliedrige Polynom $P(z)$ in beiden Kreisbereichen mindestens eine Nullstelle besitzt, die von einem durch den Nullpunkt und durch eine Nullstelle eines der Polynome

$$Q_2(z) = n_{p-2} Q_1(z) - z Q_1'(z), \; Q_3(z) = n_{p-3} \cdot Q_2(z) - z\, Q_2'(z), \; \ldots,$$

$$Q_{p-2}(z) = n_p \cdot n_{p-1} \ldots n_2 c_0 + (n_p - 1)(n_{p-1} - 1) \ldots (n_2 - 1) c_1 z$$

gehenden Kreis begrenzt werden.

Daraus folgt, dass das Polynom $P(z)$ in beiden von jedem durch die Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta' = -q \frac{c_0}{c_1}$ gehenden Kreis begrenzten Bereichen mindestens je eine Nullstelle besitzt. Dies gilt auch dann, wenn man im Ausdruck von ζ' die Zahl q durch p ersetzt.

Bezeichnen k_q, k_p bzw. k_n sich im Nullpunkt berührende und durch den Punkt $-q \frac{c_0}{c_1}$, $-p \frac{c_0}{c_1}$ bzw. $-n \frac{c_0}{c_1}$ gehende Kreislinien, so ist die Kreisscheibe $(k_q)_-$ bzw. $(k_p)_-$ ein Teil von $(k_p)_-$ bzw. $(k_n)_-$ und der Kreisbereich $(k_p)_+$ bzw. $(k_n)_+$ ist ein Teilbereich von $(k_q)_+$ bzw. $(k_p)_+$. Ist k_q, k_p bzw. k_n eine durch den Nullpunkt und durch den Punkt $-q \frac{c_0}{c_1}$, $-p \frac{c_0}{c_1}$ bzw. $-n \frac{c_0}{c_1}$ gehende Geraden, so fallen diese drei

Geraden zusammen. Beide von dieser Geraden begrenzte Halbebenen enthalten also Nullstellen des Polynoms $P(z)$.

Wir haben schon bewiesen, dass das Polynom $P(z)$ in den Bereichen $(k_q)_-$, $(k_q)_+$, $(k_n)_-$ und $(k_n)_+$ mindestens je eine Nullstelle besitzt. Dies gilt auch für die Bereiche $(k_p)_-$ und $(k_p)_+$, weil $(k_p)_-$ bzw. $(k_p)_+$ den Bereich $(k_q)_-$ bzw. $(k_n)_+$ in sich enthält.

Wendet man diese Resultate auf den Fall $c_h = a_h - Z b_h$ $(h = 0, 1, \ldots, n)$ an, so ergibt sich der Satz II ebenso, wie der Satz I.

Sind $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$ und $a_0 b_0 a_1 b_1 \neq 0$, so sind

$$\frac{a_0 - Zb_0}{a_1 - Zb_1} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = -\eta\,.$$

Daraus folgt der Satz, weil η von Z unabhängig ist. Jeder Kreis, der durch den Nullpunkt und durch den Punkt $n\eta$, oder $p\eta$, oder $q\eta$ geht begrenzt also Bereiche, in denen die Funktion $F(z)$ jeden Wert Z annimmt.

5. Der Satz III lässt sich so verallgemeinern:

IV. *Sind*

$$a_0 b_n - a_n b_0 = 0,\ a_0 b_0 a_n b_n \neq 0,$$

so nimmt die rationale Funktion

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}$$

in beiden vom Kreis

$$|z| = \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

begrenzten Kreisbereichen jeden Wert an.

Die Z-Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Funktion $F(z)$ genügen der Gleichung

$$(a_0 - Zb_0) + (a_1 - Zb_1)z + \ldots + (a_n - Zb_n)\, z^n = 0\,. \qquad (11)$$

Ist also $Z \neq \dfrac{a_n}{b_n}$, so ist

$$(-1)^n z_1 z_2 \ldots z_n = \frac{a_0 - Zb_0}{a_n - Zb_n} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{b_0}{b_n}\,.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\text{Min}\ |z_h|^n \leq \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \leq \text{Max}\ |z_h|^n \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit ist der Satz IV bewiesen, weil $F(0) = \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{a_n}{b_n}$ und $F(\infty) = \dfrac{a_n}{b_n}$ sind.

Der Beweis des folgenden Satzes ist ebenso elementar:

V. *Sind*

$$a_0 b_m - a_m b_0 = 0, \; a_0 b_0 a_m b_m \neq 0 \; (1 \leq m < n)$$

so nimmt die rationale Funktion

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m + \ldots + b_n z^n}$$

auf der Kreisscheibe

$$|z| \leq R = \left| \binom{n}{m} \frac{a_0}{a_m} \right|^{\frac{1}{m}}$$

jeden Wert an.

Ist nämlich $Z \neq C = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_m}{b_m}$, so besteht die Gleichung

$$(-1)^m \sum \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} = \frac{a_m - Zb_m}{a_0 - Zb_0} = \frac{a_m}{a_0} = \frac{b_m}{b_0}$$

für die Nullstellen der Gleichung (11).

Ist nun $\varrho = \operatorname{Min} |z_h|$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$\binom{n}{m} \frac{1}{\varrho^m} \geq \left| \sum \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} \right| = \left| \frac{a_m}{a_0} \right| .$$

Daraus folgt der Satz V, weil $F(0) = C$ ist.

E. B. Van Vleck und später auch andere Mathematiker[3] haben die folgende Vermutung von P. Montel bewiesen:

Das Polynom

$$P(z) = c_0 + c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots + c_n z^n \quad (c_0 c_m \neq 0, 1 \leq m < n)$$

besitzt mindestens m Nullstellen auf der Kreisscheibe

$$|z| \leq \left| \binom{n}{m} \frac{c_0}{c_m} \right|^{\frac{1}{m}}$$

[3] *Van Vleck E. B.*, On limits to the absolute values of the roots of a polynomial, Bull. de la Société math. de France 58 (1925), 105—125. — *Biernacki M.*, Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires, Bull. de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Math., série A, 1927, 541—685. — *Montel P.*, Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes, Commentarii Math. Helv. 7 (1934—35), 178—200. — *Ballieu R.*, Limitations en module et locations des zéros de polynomes, Mémoires de la Soc. Royale des sciences de Liège (4) 1 (1936), 85—182. — *Markovič D.*, Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynomes, Publ. math. Univ. Belgrade 67 (1938), 36—47. — *Anghelutza Th.*, Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes, Bull. de la Soc. math. de France 67 (1939), 120—131.

Daraus erhält man für den Fall $c_h = a_h - Z\,b_h$ $(h = 0,\ m,\ m + 1,\ \ldots,\ n)$ den Satz:

VI. *Die gebrochene rationale Funktion*

$$F(z) = \frac{a_0 + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \ldots + b_n z^n},$$

$$a_0 b_m - a_m b_0 = 0\ ,\ a_0 b_0 a_m b_m \neq 0\,,$$

nimmt auf der Kreisscheibe

$$|z| \leq \left|\binom{n}{m} \frac{a_0}{a_m}\right|^{\frac{1}{m}}$$

jeden Wert mindestens m-mal an.

6. In unseren Sätzen spielt der Nullpunkt eine ausgezeichnete Rolle. Mit Hilfe der Identitäten

$$f(z_0 + x) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} x + \frac{f''(z_0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$g(z_0 + x) = g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1!} x + \frac{g''(z_0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} x^n$$

$$= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

können wir unsere Sätze leicht so ausdrücken, dass ein beliebiger Punkt z_0 die Rolle des Nullpunktes übernimmt.

Der Satz III lässt sich z. B. in der allgemeinen Form ausdrücken:

VII. *Ist z_0 eine Nullstelle der Derivierten der gebrochenen rationalen Funktion n-ten Grades*

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

für welche die Ungleichung $f(z_0) \cdot g(z_0) \cdot f'(z_0) \cdot g'(z_0) \neq 0$ besteht, so nimmt die Funktion $F(z)$ in einem die Punkte

$$z_0 \text{ und } \zeta_0(n) = z_0 - n \cdot \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

enthaltenden beliebigen Kreisbereich jeden Wert an.

Gibt es in der Folge

$$A_0 = |f(z_0)| + |g(z_0)|,\ A_h = |f^{(h)}(z_0)| + |g^{(h)}(z_0)| \quad (h = 1,\ 2, \ldots, n)$$

höchstens $p + 1$ positive Glieder und zwar die Glieder von den Indizes 0, 1, n_2, n_3, ..., n_p, und ist

$$q = \frac{n_2}{n_2 - 1} \frac{n_3}{n_3 - 1} \cdots \frac{n_p}{n_p - 1},$$

so nimmt die rationale Funktion $F(z)$ in einem das Punktpaar z_0, $\zeta_0(p)$, oder z_0, $\zeta_0(q)$ enthaltenden beliebigen Kreisbereich jeden Wert an.

Dies folgt aus der Identität

$$F'(z) \cdot g^2(z) = f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z),$$

weil im Satz III

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = f(0) \cdot g'(0) - f'(0) \cdot g(0) = 0$$

ist.

7. Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Z-Stellen der rationalen Funktion (1) n-ten Grades und sind $a_0 - Zb_0 \neq 0$, $a_1 = b_1 = 0$, so ist

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = 0 \left(= - \frac{a_1 - Zb_1}{a_0 - Zb_0} \right) \tag{12}$$

Bezeichnet g eine Gerade durch den Nullpunkt, die mit der positiven reellen Achse den Winkel ω bildet, sind ferner

$$z_k = r_k \cdot e^{i(\varphi_k + \omega)} \text{ und } \frac{\cos \varphi_k}{r_k} = \frac{1}{d_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

und multipliziert man die Gleichung (12) mit $e^{i\omega}$, so erhält man für den reellen Teil der Gleichung die Relation

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} = 0 . \tag{14}$$

Hier bedeutet d_h den mit Vorzeichen versehenen Durchmesser des Kreises durch den Punkt z_h, der im Nullpunkt die Gerade g berührt. Liegen die Punkte z_h und z_j an derselben Seite bzw. an entgegengesetzten Seiten der Geraden g, so haben die Durchmesser d_h und d_j dasselbe Vorzeichen bzw. entgegengesetzte Vorzeichen. Für einen auf der Geraden g liegenden Punkt z_j ist $\frac{1}{d_j} = 0$.

Nimmt man an, dass

$$\frac{1}{d_1} \geqq \frac{1}{d_2} \geqq \ldots \geqq \frac{1}{d_n} \neq 0$$

sind, so erhält man aus der Gleichung (14) die Ungleichung

$$\frac{1}{d_1} \leqq \frac{n-1}{-d_n} \quad \text{oder} \quad -d_n \leqq (n-1) \cdot d_1 .$$

Daraus folgt die folgende Verallgemeinerung eines früheren Satzes[4] von mir:

VIII. *Ist* $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ *eine gebrochene rationale Funktion vom höchstens n-ten Grade, für welche* $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ *und* $f(z_0) \cdot g(z_0) \neq 0$ *sind, und bezeichnen* k *und* K *im Punkte* z_0 *sich von aussen berührende Kreise vom Halbmesser* r *bzw.* $R = (n-1)\,r$, *so nimmt die rationale Funktion* $F(z)$ *in der Kreisscheibe* (K) *jeden Wert an, den sie in einem beliebigen Punkte der Kreisscheibe* (k) *annehmen kann.*

Der Wert $F(z_0)$ bildet keine Ausnahme, weil z_0 ein gemeinsamer Punkt der Kreise k und K ist. Nimmt $F(z)$ in einem Punkte von $(k)_-$ den singulären Wert $F(\infty)$ an, so nimmt sie diesen Wert auch in einem Punkte der Kreisscheibe $(K')_-$ vom Halbmesser $R' = (n-2)\,r$ an, von der $(k)_-$ im Punkte z_0 von aussen berührt wird, weil das auf $z = \infty$ bezügliche Glied in der Gleichung (14) verschwindet und deshalb $\frac{1}{d_1} \leqq \frac{n-2}{-d_n}$ ist.

Aus dem Satz VIII folgt

IX. *Die rationale Funktion n-ten Grades*

$$F(z) = \frac{a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n} \qquad (a_0 b_0 \neq 0)$$

nimmt im Kreise $|z| \leqq (n-1)\,r$ *jeden solchen Wert mindestens zweimal an, den sie im Kreise* $|z| \leqq r$ *annimmt.*

8. Ist z_0 eine solche Nullstelle der Derivierten von $F(z)$, für welche $f(z_0)\,g(z_0)\,f'(z_0)\,g'(z_0) \neq 0$, so kann man statt des Satzes VIII den folgenden Satz aussprechen:

X. *Ist* z_0 *eine solche Nullstelle der Derivierten der gebrochenen rationalen Funktion* $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ *n-ten Grades, für welche* $f(z_0)\;g(z_0) \neq 0$ *ist, bezeichnen* K *und* K' *sich im Punkte* z_0 *(von aussen) berührende Kreise vom Halbmesser* $R = (2n-1)\,r$, *bezeichnet ferner* k *den Kreis vom Halbmesser* r, *von dem* K *in* z_0 *von aussen berührt wird und gibt es endlich in* $(k)_-$ *mindestens einen Punkt* ζ, *so dass in jedem Punkte* z *von* $(K)_-$ $F(z) \neq F(\zeta)$ *ist, so nimmt die Funktion* $F(z)$ *in* $(K')_-$ *jeden Wert an. Nimmt* $F(z)$ *in* $(K')_-$ *nicht jeden Wert an, so nimmt sie in* $(K)_-$ *jeden solchen Wert an, den sie in* $(k)_-$ *annimmt.*

[4] *v. Sz. Nagy Gy. (J.),* Geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten, Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 27 (1918), 44—48. — *Pólya—Szegő,* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, S. 58, Aufgabe 115.

Ist $z_0 = 0$, so erhält man aus den Annahmen des Satzes X die Relationen $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$, $a_0 b_0 \neq 0$, $\zeta \neq 0$, $Z = F(\zeta) \neq \frac{a_0}{b_0}$.

Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(= \zeta)$ bzw. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die Z-Stellen bzw. U-Stellen der Funktion $F(z)$ und ist $U \neq \frac{a_0}{b_0}$, so ist

$$\frac{a_1 - Zb_1}{a_0 - Zb_0} = \frac{a_1 - Ub_1}{a_0 - Ub_0} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1}{b_0}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} \left(= \frac{-a_1}{a_0}\right). \tag{15}$$

Bezeichnet g eine Gerade, wie im vorangehenden § und sind

$$z_h = r_h \,.\, e^{i(\varphi_h + \omega)}\,,\quad u_h = r'_h \,.\, e^{i(\varphi'_h + \omega)}\,,\quad \frac{\cos \varphi_h}{r_h} = \frac{1}{d_h}\,,\quad \frac{\cos \varphi'_h}{r'_h} = \frac{1}{d'_h}\,,$$

so erhält man aus (15) die Gleichung

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{d_h} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{d'_h}. \tag{16}$$

Wir können annehmen, dass beide Summen auch positive Glieder besitzen. Widrigenfalls multipliziert man die Gleichung mit -1. Wir wählen die Indizes so, dass

$$\frac{1}{d_1} \geq \frac{1}{d_2} \geq \ldots \geq \frac{1}{d_n} \qquad \frac{1}{d'_1} \geq \frac{1}{d'_2} \geq \ldots \geq \frac{1}{d'_n} \qquad \left(\frac{1}{d_1} > 0\,,\ \frac{1}{d'_1} > 0\right)$$

sind. Führt man die negativen Glieder von der linken Seite der Gleichung (16) zur rechten über, so folgt die Ungleichung

$$\frac{1}{d_1} \leq \frac{2n-1}{D}\,,\quad \frac{1}{D} = \mathrm{Max}\left\{\frac{1}{d'_1}\,,\ \frac{1}{-d_n}\right\}. \tag{17}$$

Ist nun $d_n > 0$, oder $-d_n > (2n-1) \,.\, d_1$, so ist $d'_1 < (2n-1) \,.\, d_1$.

Hat also die Funktion $F(z)$ keine Z-Stelle in $(K)_-$, so besitzt sie mindestens eine U-Stelle in $(K')_-$. Hier ist U ein beliebiger Wert.

Damit ist der Satz IX bewiesen.

8. In der mathematischen Litteratur ist eine Reihe solcher Sätze über die Lage Nullstellen von Polynomen bekannt, deren gewisse Koeffi-

zienten gegeben sind, die übrigen aber Parameter sind.[5] In dieser Richtung können wir für rationale Funktionen z. B. den Satz aussprechen:

XI. *Besitzt jedes Polynom n-ten Grades von der Form*

$$f(z) = \varphi(z) + f_1(z)\,, \quad \varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_p z^p\,,$$

$$f_1(z) = a_{p+1} z^{p+1} + \ldots + a_n z^n\,,$$

wo die c_h *Koeffizientengegebene Zahlen, die* a_h *Koeffizienten aber beliebige Parameter sind, in einem den Nullpunkt enthaltenden Bereich B mindestens* $p'(\leq p)$ *Nullstellen, so nimmt die rationale Funktion von der Form*

$$F(z) = C\,\frac{\varphi(z) + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \ldots + a_n z^n}{\varphi(z) + b_{p+1} z^{p+1} + b_{p+2} z^{p+2} + \ldots + b_n z^n} =$$

$$= C\,\frac{\varphi(z) + f_1(z)}{\varphi(z) + g_1(z)} \quad (C \neq 0)$$

im Bereich B jeden Wert mindestens p'-mal an.

Die Z-Stellen dieser Funktion $F(z)$ genügen nämlich der Gleichung

$$(C - Z)\,\varphi(z) + C f_1(z) - Z g_1(z) = 0.$$

Für $Z = C$ ist ist der Nullpunkt eine mindestens $(p+1)$-fache Wurzel der Gleichung. Ist $C \neq Z$, so besitzt diese Gleichung nach der Annahme mindestens p' Wurzeln im Bereich B.

Damit ist der Satz X bewiesen.

Aus diesem Satz und aus einem Satz[6] von L. Fejér folgt z. B. der Satz

XII. *Die gebrochene rationale Funktion*

$$F(z) = \frac{1 - z^{n_1} + a_2 z^{n_2} + \ldots + a_p z^{n_p}}{1 - z^{n_1} + b_2 z^{n_2} + \ldots + b_p z^{n_p}} \quad (1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p \qquad (18)$$

nimmt in einer beliebigen Kreisscheibe, die den Nullpunkt und einen Punkt $q \cdot \varepsilon$, *oder* $p \cdot \varepsilon$ *enthält, wo*

$$q = \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1}\,\frac{n_3}{n_3 - n_1}\,\cdots\,\frac{n_p}{n_p - n_1}\right)^{\frac{1}{n_1}} \quad \text{und } \varepsilon^{n_1} = 1$$

[5] Ausser den in der Fussnote[3] angeführten Arbeiten sind die folgenden zu zitieren: *Carmichael R. D.—Mason T. E.*, Note on the roots of algebraic equations, Bull. of the Amer. Math. Soc. 21 (1918), 14—22. — *v. Sz. Nagy Gy.*, Über einen Satz von Laguerre, Journal für d. reine und angew. Math. 169 (1933), 186—192. — *Dieudonné J.*, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, Annales de l'École Norm. supérieure (3) 48 (1931), 247—358. — *Dieudonné J.*, Sur la théorie analytique des polynomes d'une variable (á coefficients quelconques), Mémorial des scienc. math. Fasc. 93 (1938), 1—70.

[6] S. die in der Fussnote[1] angeführte Arbeit von Fejér.

sind, jeden Wert an. Ist $n_1 > 1$, so nimmt diese Funktion $F(z)$ in der Kreisscheibe $|z| \leqq q \leqq p$ mindestens zweimal jeden Wert an.

Aus einem Satz von A. Pellet[7] folgt, dass die Funktion (18) jeden Wert auch in der Kreisscheibe $|z| \leqq p^{\frac{1}{n_1}}$ annimmt.

Wir wollen noch einen Satz ausprechen, wo der Bereich B des Satzes X kein Kreisbereich ist. Aus einem Satz von mir[8] folgt nämlich der Satz:

XIII. *Es gibt unendlichviele Bernoulli-sche Lemniskaten, die durch die Punkte* 0, $+\sqrt{\frac{n}{2}}$ und $-\sqrt{\frac{n}{2}}$ *gehen. Bezeichnet B den geschlossenen endlichen Bereich, der von einer dieser Lemniskaten begrenzt wird, so nehmen die gebrochenen rationalen Funktionen n-ten Grades*

$$F(z) = \frac{1 - z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n}{1 - z^2 + b_3 z^3 + \ldots + b_n z^n}$$

im Bereich B jeden Wert an.

[7] *Pellet A.*, Sur la racine de plus petit module des équations, Bull. des scienc. math. de France (2) 48 (1924), 265—268.

[8] S. meine in der Fussnote[5] angeführte Arbeit.

SUR UNE CLASSE GÉNÉRALE DE PROCÉDÉS DE SOMMATION POUR LES SÉRIES DE FOURIER.

PAR BÉLA DE SZ. NAGY
MEMBRE DE L'ACADÉMIE.

(REÇU LE 23 JUIN, 1947)

§ 1. INTRODUCTION.

Soit $\varphi(u)$ une fonction définie dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$; en particulier, soit $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$. Cette fonction engendre un procédé de sommation pour des séries, et cela en regardant comme „somme généralisée" de la série $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ la limite des sommes

$$a_0 + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) a_1 + \varphi\left(\frac{2}{n}\right) a_2 + \ldots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) a_{n-1}$$

pour $n \to \infty$, lorsque cette limite existe. On déduit de certains résultats de *Perron* [1][1], que la condition de „permanence" est toujours satisfaite lorsque $\varphi(u)$ est continue au point 0 et à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$. Nous appellerons une telle fonction $\varphi(u)$ une *fonction sommatoire.*

Le procédé „ordinaire" de sommation par les sommes partielles correspond évidemment à la fonction sommatoire égale à 1 dans $0 \leqq u < 1$, celui de Cesàro (d'ordre 1) correspond à la fonction $1-u$. Le procédé de sommation de Cesàro d'ordre $\delta \neq 1$ n'est plus de ce type, mais celui de M. Riesz du même ordre (qui lui est équivalent), correspond à la fonction $(1-u)^\delta$.

Nous ne voulons envisager que des séries particulières, notamment des séries de Fourier

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + c_1(x) + c_2(x) + \ldots \quad \text{où} \quad c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1,1}$$

$f(x)$ étant une fonction sommable de période 2π. Les sommes

[1] Voir l'index bibliographique placé à la fin de ce Mémoire.

$$\sigma_n(f\,;x) = \frac{c_0}{2} + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) c_1(x) + \ldots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) c_{n-1}(x)$$

sont alors des polynomes trigonométriques d'ordre $n - 1$.

Nous voulons déterminer dans le présent Mémoire les analogues des „constantes de Lebesgue" et les „constantes d'approximation", c'est-à-dire les quantités σ_n, $\bar{\sigma}_n$; ϱ_n^α, $\bar{\varrho}_n^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$; $\varrho_n^{(r)}$, $\bar{\varrho}_n^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ et $\varrho_n^{(r)\alpha}$, $\bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$ $(r = 1, 2, \ldots; 0 < \alpha < 1)$, définies de la manière suivante:

σ_n est la borne supérieure de $\sigma_n(f) = \max\limits_x |\sigma_n(f\,;x)|$, et $\bar{\sigma}_n$ celle de $\bar{\sigma}_n(f) = \max\limits_x |\bar{\sigma}_n(f\,;x)|$, lorsque f parcourt toutes les fonctions telles que $|f(x)| \leq 1$ ($\bar{\sigma}_n(f\,;x)$ désignant le conjugué du polynome trigonométrique $\sigma_n(f\,;x)$);

ϱ_n^α, $\varrho_n^{(r)}$, $\varrho_n^{(r)\alpha}$ sont les bornes supérieures de $\varrho_n(f) = \max\limits_x |f(x) - \sigma_n(f; x)|$, et $\bar{\varrho}_n^\alpha$, $\bar{\varrho}_n^{(r)}$, $\bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$ celles de $\varrho_n(\bar{f})$, lorsque f parcourt toutes les fonctions continues, de période 2π et satisfaisant respectivement aux conditions

a) $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|^\alpha$; b) $|f^{(r)}(x)| \leq 1$;

c) $|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leq |h|^\alpha$;[2]

la fonction conjuguée $\bar{f}(x)$ de la fonction (1,1) étant définie comme la fonction continue, dont la série de Fourier est:

$$\bar{f}(x) \sim 0 + \bar{c}_1(x) + \bar{c}_2(x) + \ldots \quad \textit{où} \quad \bar{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx. \tag{1,2}$$

Un théorème de Privaloff[3] affirme que si $f(x)$ est continue et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ et avec la constante M, alors $\bar{f}(x)$ existe et satisfait à la condition de Lipschitz du même ordre, mais avec la constante $A_\alpha M$ où A_α est une quantité ne dépendant que de α. On en déduit aisément l'inégalité $\bar{\varrho}_n^\alpha \leq A_\alpha \varrho_n^\alpha$ et, vu que $\bar{\bar{f}}(x) = -f(x)$, aussi celle inverse: $\varrho_n^\alpha \leq A_\alpha \bar{\varrho}_n^\alpha$. Les quantités ϱ_n^α et $\bar{\varrho}_n^\alpha$ ayant donc le même ordre de grandeur, il suffit d'en étudier la première. De la même raison, il suffit d'étudier des quantités $\varrho_n^{(r)\alpha}$, $\bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$ seulement l'une, par exemple la première pour r impair et la seconde pour r pair.

Quant aux quantités σ_n, $\bar{\sigma}_n$ et $\varrho_n^{(r)}$, $\bar{\varrho}_n^{(r)}$, la situation est différente. En effet, la condition $|f(x)| \leq 1$ n'entraîne même pas l'existence de $\bar{f}(x)$, et la condition $|f^{(r)}(x)| \leq 1$, bien qu'elle entraîne l'existence de $\bar{f}(x)$, n'assure pas que celle-ci admette la dérivée r-ième. Il faut donc qu'on étudie ces quantités chacune séparément.

[2] Lorsque nous parlerons, dans ce qui suit, de la dérivée d'ordre r d'une fonction, nous supposerons toujours que celle-ci existe presque partout et que la fonction est son intégrale r fois itérée.

[3] Cf. p. ex. *Zygmund* [*], pp. 156—157.

Toutes ces quantités dépendent, bien entendu, de la fonction sommatoire $\varphi(u)$.

Dans le cas où $\varphi(u) = 1$ dans $0 \leq u < 1$, c'est-à-dire le cas des sommes partielles, on a d'après Lebesgue:[4]

$$\sigma_n = O(\log n), \; \varrho_n^\alpha = O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right), \; \varrho_n^{(r)} = O\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \text{ et } \varrho_n^{(r)\alpha} = O\left(\frac{\log n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

les symboles O ne pouvant pas être remplacés par o. Les quantités conjuguées ont respectivement les mêmes ordres de grandeur.

Dans le cas où $\varphi(u) = 1 - u$, c'est-à-dire le cas des sommes de Fejér, on a $\sigma_n = 1$, tandis que pour $\bar{\sigma}_n$ on a $\bar{\sigma}_n = O(\log n)$.[5] Bernstein[6] a montré que

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \varrho_n^{(1)} = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

tandis que les quantités $\varrho_n^{(r)}$ $(r = 2, 3, \ldots)$ et $\varrho_n^{(r)\alpha}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ ont l'ordre de grandeur $O\left(\frac{1}{n}\right)$.[7] Alexits[8] a montré que $\bar{\varrho}_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Les autres quantités $\bar{\varrho}_n$ ont les mêmes ordres de grandeur que les ϱ_n correspondants.[9]

On sait, d'après Jackson et de la Vallée Poussin,[10] que la fonction sommatoire $\varphi(u)$ peut être choisie de la sorte que

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \; \varrho_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \text{ et } \varrho_n^{(r)\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

et que c'est le maximum qu'on puisse atteindre, c'est-à-dire que le symbole O ne peut jamais être remplacé par o. Un tel „procédé d'approximation du meilleur ordre de grandeur" est fourni par exemple par la fonction continue qui est égale à 1 dans $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ et linéaire dans $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$.[11]

Favard, Achyeser et Krein[12] ont déterminé, pour chaque couple d'entiers r, n, la fonction sommatoire qui rend la valeur de $\varrho_n^{(r)}$ la plus petite possible. Cette fonction ne dépend pas de n et est représentée par

[4] *Lebesgue* [1] (pour σ_n, ϱ_n^α et $\varrho_n^{(1)}$); *Fekete* [1] (pour $\bar{\sigma}_n$); *de la Vallée Poussin* [*]; cf. aussi *Kolmogoroff* [1]; *Nikolsky* [*].

[5] *Sz. Nagy* [1], p. 121.

[6] *Bernstein* [1] (n° 56); cf. aussi *Nikolsky* [1], [*] et *Sz. Nagy* [3].

[7] *Jackson* [*], p. 63; *Nikolsky* [2], [*]; *Sz. Nagy* [3].

[8] *Alexits* [1]; cf. aussi *Sz. Nagy* [3]; *Nikolsky* [*] et *Zygmund* [1].

[9] *Sz. Nagy* [3]; *Nikolsky* [*].

[10] *Jackson* [1], [*]; *de la Vallée Poussin* [*].

[11] *de la Vallée Poussin* [*], pp. 33—35.

[12] *Favard* [1]; *Achyeser—Krein* [1]; cf. aussi *Sz. Nagy* [1].

$$1 - u^r \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu - u)^r} + \frac{1}{(2\nu + u)^r} \right) \qquad \text{pour } r \text{ pairs}$$

et par

$$1 - u^r \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu - u)^r} - \frac{1}{(2\nu + u)^r} \right) \qquad \text{pour } r \text{ impairs,}$$

la valeur minimum de $\varrho_n^{(r)}$ étant C_r/n^r où

$$C_r = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} (1 - 3^{-r-1} + 5^{-r-1} - \ldots) & \text{pour } r \text{ pairs,} \\ \dfrac{4}{\pi} (1 + 3^{-r-1} + 5^{-r-1} + \ldots) & \text{pour } r \text{ impairs.} \end{cases}$$

Les mêmes auteurs ont résolu aussi le problème analogue pour $\bar{\varrho}_n^{(r)}$; les résultats sont analogues, on n'a qu'à intervertir les conditions de parité.

D'autres fonctions sommatoires qu'on ait encore étudiées, sont: $\cos \frac{\pi u}{2}$ (*Bernstein* [2]), $(1 - u)^\delta$ et $(1 - u^2)^\delta$ avec $\delta > 0$ arbitraire (*Jacob* [1]) et $1 - u^\beta$ avec β entier positif arbitraire (*Zygmund* [2]).

En regardant ces résultats isolés, le problème se pose de les coordonner et d'établir des critères généraux décidant le problème de l'ordre de grandeur des quantités envisagées pour une classe de fonctions sommatoires aussi étendue que possible. Le but du présent Mémoire est de donner de tels critères. Nous établissons d'abord quelques propositions sur les intégrales de Fourier; nous en tirerons largement parti dans la démonstration de nos théorèmes principaux. A titre d'illustration, nous étudierons quelques cas particuliers embrassant ceux dont nous venons de parler. Enfin, nous indiquerons des possibilités de généralisation dans la direction des fonctions presque périodiques et des fonctions représentées par des intégrales trigonométriques.

§ 2. QUELQUES THÉORÈMES SUR LES INTÉGRALES DE FOURIER.

On sait que si la fonction $\tau(u)$, définie dans $0 \leqq u < \infty$, est continue, à variation bornée et tend vers 0 pour $u \to \infty$, alors les intégrales

$$C_\tau(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \cos uv \, du, \qquad S_\tau(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau(u) \sin uv \, du$$

convergent (la première pour $v \neq 0$) et on a les formules réciproques:

$$\int_0^\infty C_\tau(v) \cos uv \, dv = \tau(u) , \quad \int_0^\infty S_\tau(v) \sin uv \, dv = \tau(u) ,$$

valables pour $u \geqq 0$, resp. $u > 0$.[13]

Les conditions ci-dessus sont satisfaites en particulier si $\tau(u)$ admet une dérivée sommable au sens de Lebesgue sur $0 \leqq u < \infty$,[14] en signe: $\tau'(u) \in L(0, \infty)$, et si $\tau(u) \to 0$ pour $u \to \infty$.

Les fonctions $C_\tau(v)$ et $S_\tau(v)$ n'appartiennent pas en général à la classe $L(0, \infty)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on pose des conditions plus restrictives sur $\tau(u)$. Nous allons donner de telles conditions.

Théorème C. *Supposons que la fonction $\tau(u)$, définie pour $0 \leqq u < \infty$, satisfasse aux conditions suivantes : 1° $\tau(u) \to 0$ pour $u \to \infty$, 2° $\tau'(u) \in L(0, \infty)$, 3° $\tau'(u)$ est à variation bornée dans le voisinage de chaque point sauf un nombre fini de points au plus : 0, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (écrits en ordre croissant) où la variation totale peut devenir infinie, mais cela seulement de la sorte que les intégrales*[15]

$$\int_{+0} u \, | d\tau'(u) | , \quad \int' | u - a_i | \log \frac{1}{| u - a_i |} \, | d\tau'(u) | , \quad \int^{\infty} u \, | d\tau'(u) | \tag{2,1}$$

convergent.

Alors $C_\tau(v) \in L(0, \infty)$. De plus, on a :

$$\int_0^\infty | C_\tau(v) | \, dv \leqq \int_{+0}^{b_1} u \, | d\tau'(u) | + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{s} \int_{b_i}^{b_{i+1}}{}' | u - a_i | \left(\log \frac{u + a_i}{| u - a_i |} + 2 \right) | d\tau'(u) | + R \tag{2,2}$$

où les b_i désignent des points arbitraires tels que $0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_s < a_s < b_{s+1} = \infty$ et R est une quantité dépendant des valeurs $\tau(b_i)$, $\tau'(b_i \pm 0)$.

En particulier, lorsqu'on n'admet que le seul point exceptionnel 0 resp. $a > 0$, alors

[13] Cf. p. ex. *Titchmarsh* [*], pp. 13—17.

[14] Dont elle est l'intégrale, conformément à notre convention faite, note 2.

[15] Lorsque l'intervalle (b, c) contient un point exceptionnel a, alors nous convenons d'écrire

$$\int'^{c} \quad \text{au lieu de} \quad \int^{a-0} + \int_{a+0}^{c} .$$

$$\int_0^\infty |C_\tau(v)|\,dv \leq \int_{+0}^\infty u\,|d\,\tau'(u)| \tag{2,3}$$

resp.

$$\int_0^\infty |C_\tau(v)|\,dv \leq a\,|\tau'(+0)| + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |u-a|\left(\log\frac{u+a}{|u-a|}+2\right)|d\tau'(u)|\,. \tag{2,4}$$

Démonstration. Montrons d'abord que nos hypothèses entraînent que

$$u\,\tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to 0,\ \infty\,;\ (u-a_i)\log|u-a_i|\,.\,\tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to a_i\,. \tag{2,5}$$

La proposition concernant le point a_i s'établit comme il suit:
Soit $0 < h < k \leq 1$; alors

$$h\log\frac{1}{h}\,.\,|\tau'(a_i+h)| = h\log\frac{1}{h}\,.\left|\tau'(a_i+k) - \int_h^k d\,\tau'(a_i+x)\right| \leq$$

$$h\log\frac{1}{h}\,.\,|\tau'(a_i+k)| + \int_h^k x\log\frac{1}{x}\,.\,|d\,\tau'(a_i+x)| = A + B\,,$$

puisque la fonction $x\log\frac{1}{x}$ est croissante dans $(0,1)$. Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut choisir k de façon que $B < \frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit h entre 0 et k; après avoir fixé un tel k, on peut rendre $A < \frac{\varepsilon}{2}$ en choisissant h assez petit. On a donc pour h assez petit: $h\log\frac{1}{h}\,.\,|\tau'(a_i+h)| < \varepsilon$, ce qui prouve notre proposition pour u tendant vers a_i de droite. Le cas de l'autre côté est analogue.

Le même raisonnement, mais avec x au lieu de $x\log\frac{1}{x}$, prouve notre proposition pour $u \to 0$.

Enfin, la proposition pour $u \to \infty$ s'établit comme il suit. Soit $u < v$, alors

$$u\,|\tau'(u)| = u\left|\tau'(v) - \int_u^v d\tau'(x)\right| \leq v\,|\tau'(v)| + \int_u^v x\,|d\tau'(x)| = C + D\,.$$

Choisissons u assez grand pour que D soit $< \frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit v; on peut alors choisir v dans (u, ∞) de façon que $v\,|\tau'(v)|$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$, puisque, en cas contraire, on aurait $|\tau'(v)| \geqq \frac{\varepsilon}{2v}$ dans (u, ∞), en contradiction avec l'hypothèse 2°.

Cela étant, nous allons démontrer d'abord (2,3), puis (2,4), enfin (2,2).

a) Supposons que le seul point exceptionnel admis soit 0. Nous obtenons, en intégrant deux fois par parties:

$$\frac{\pi}{2} C_\tau(v) = \left[\tau(u)\frac{\sin uv}{v}\right]_0^\infty - \left[\tau'(u)\frac{1-\cos uv}{v^2}\right]_0^\infty + \int_{+0}^{\infty} \frac{1-\cos uv}{v^2}\, d\tau'(u). \tag{2,6}$$

Les parties intégrées s'annulent par l'hypothèse 1° et par (2,5). Par conséquent,

$$\int_0^\infty |C_\tau(v)|\, dv \leqq \frac{2}{\pi}\int_{+0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \frac{1-\cos uv}{v^2}\, dv\right] |d\,\tau'(u)| = \int_{+0}^{\infty} u\, |d\,\tau'(u)|,$$

ce qui prouve (2,3).

Remarquons que la convergence de l'intégrale au second membre de (2,3) est équivalente avec le fait que la fonction $\tau(u)$ peut être décomposée en différence de deux fonctions convexes et tendant vers 0 (pour $u \to \infty$): $\tau(u) = \tau_1(u) - \tau_2(u)$ où

$$\tau_1(u) = \int_u^\infty (w-u)\,[d\,\tau'(w)]^+, \quad \tau_2(u) = \int_u^\infty (w-u)\,[d\,\tau'(w)]^-.$$

b) Supposons maintenant que le seul point exceptionnel admis soit le point $a > 0$. Nous obtenons, en intégrant par parties:

$$\frac{\pi}{2} C_\tau(v) = -\left(\int_0^a + \int_a^\infty\right) \tau'(u)\frac{\sin uv}{v}\, du = \tag{2,7}$$

$$= \left[\tau'(a)\frac{\cos uv - \cos av}{v^2}\right]_0^{a-0} + \left[\quad\right]_{a+0}^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos av - \cos uv}{v^2}\, d\tau'(u) =$$

$$= -\tau'(+0)\frac{1-\cos av}{v^2} + \int_0^\infty \frac{\cos av - \cos uv}{v^2}\, d\tau'(u),$$

puisque, grâce à (2,5), on a $\tau'(u)(\cos av - \cos uv) \to 0$ lorsque $u \to a$. Il s'ensuit que:

$$\int_0^\infty |C_\tau(v)|\,dv \leqq \frac{2}{\pi}\,|\tau'(+0)|\left|\int_0^\infty \frac{1-\cos av}{v^2}\,dv\,+\right.$$

$$+\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty\,\prime}\left|\int_0^\infty\left|\frac{\cos av - \cos uv}{v^2}\right|dv\right|\,|d\tau'(u)|\,.$$

Substituons, dans l'intégrale intérieure, $v = \dfrac{2w}{a+u}$ et désignons $\dfrac{|u-a|}{u+a}$ par A, alors

$$\int_0^\infty\left|\frac{\cos av - \cos uv}{v^2}\right|dv = |u-a|\int_0^\infty \frac{\left|\sin w\,.\,\sin\dfrac{w}{A}\right|}{w^2}\,dw \leqq$$

$$\leqq |u-a|\left\{\int_0^A \frac{1}{A}\,dw + \int_A^1 \frac{1}{w}\,dw + \int_1^\infty \frac{1}{w^2}\,dw\right\} = |u-a|\left(\log\frac{1}{A} + 2\right).$$

Cela achève la démonstration de (2,4).

c) Le cas général se ramène aux ceux que nous venons de considérer et cela en décomposant $\tau(u)$ en une somme $\tau_0(u) + \tau_1(u)\ldots +$ $+\,\tau_s(u)$ de la manière suivante:

$$\tau_0(u) = \begin{cases} \tau(u) - u\,t(b_1) & \text{pour } 0 \leqq u \leqq b_1\,, \\ 0 & \text{pour } b_1 \leqq u < \infty\,, \end{cases}$$

$$\tau_i(u) = \begin{cases} u\,[t(b_i) - t(b_{i+1})] & \text{pour } 0 \leqq u \leqq b_i\,, \\ \tau(u) - u\,t(b_{i+1}) & \text{pour } b_i \leqq u \leqq b_{i+1}\,, \\ 0 & \text{pour } b_{i+1} \leqq u < \infty\,, \end{cases}$$

($i = 1,2,\ldots,s$; $t(u)$ désignant la fonction $\dfrac{1}{u}\,\tau(u)$; $t(\infty) = 0$).

Le seul point qui peut être exceptionnel par rapport à $\tau_0(u)$, c'est le point 0, et celui par rapport à $\tau_i(u)$ ($i = 1,2,\ldots,s$), c'est le point a_i. Appliquons (2,3) à $\tau_0(u)$ et (2,4) à $\tau_i(u)$ ($i \geqq 1$). Vu que $d\tau_0'(u) = d\tau'(u)$ pour $0 \leqq u < b_1$, $d\tau_0'(u) = 0$ pour $b_1 < u < \infty$ et $d\tau_0'(b_1) = -\tau'(b_1 - 0)$ $+\,t(b_1)$, on aura, de par (2,3),

$$\int_0^\infty |C_{\tau_0}(v)|\,dv \leqq \int_{+0}^{b_1} u\,|d\tau'(u)| + |b_1\tau'(b_1 - 0) - \tau(b_1)|\,.$$

En évaluant d'une manière analogue l'intégrale de $|C_{\tau_i}(v)|$ pour $i \geqq 1$

et en observant que $C_\tau(v) = C_{\tau_0}(v) + C_{\tau_1}(v) + \ldots + C_{\tau_s}(v)$, on obtient l'inégalité (2,2) en additionnant les inégalités écrites pour chacun des termes au second membre.

Théorème C se trouve ainsi démontré.

Théorème C^α. *Soit $\tau(u)$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème C, avec la seule différence que nous supposons maintenant la convergence des intégrales :*

$$\int_{+0} u^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | , \int' | u - a_i |^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | , \int^{\infty} u^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | \qquad (2,8)$$

au lieu des intégrales (2,1), *α étant une quantité entre* 0 *et* 1.

Alors $v^\alpha C_\tau(v) \in L(0, \infty)$. De plus, on a

$$\int_0^\infty | v^\alpha C_\tau(v) | \, dv \leqq \frac{2^{1+\alpha}}{\pi \alpha (1-\alpha)} \left\{ \int_{+0}^{b_1} u^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \int_{b_i}^{b_{i+1}}{}' | u - a_i |^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | \right\} + R , \qquad (2,9)$$

le terme R dépendant des valeurs $\tau(b_i)$ et $\tau'(b_i \pm 0)$.

En particulier, lorsqu'on n'admet que le seul point exceptionnel 0 *resp.* $a > 0$, *alors*

$$\int_0^\infty | v^\alpha C_\tau(v) | \, dv \leqq \frac{2\,\Gamma(\alpha)}{\pi (1-\alpha)} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \int_{+0}^{\infty} u^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | \qquad (2,10)$$

resp.

$$\int_0^\infty | v^\alpha C_\tau(v) | \, dv \leqq \frac{2^{1+\alpha}}{\pi \alpha (1-\alpha)} \left\{ | \tau'(+0) | \, a^{1-\alpha} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty}{}' | u - a |^{1-\alpha} \, | d\tau'(u) | \right\} . \qquad (2,11)$$

Démonstration. Tout comme la convergence des intégrales (2,1) entraînait (2,5), celle des intégrales (2,8) entraîne que

$$u^{1-\alpha} \tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to 0, \infty \; ; \; | u - a_i |^{1-\alpha} \tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to a_i . \qquad (2,12)$$

a) Lorsque le seul point exceptionnel admis est 0, alors on peut partir de (2,6) où les parties intégrées s'annulent en vertu de (2,12). Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty |v^\alpha C_\tau(v)|\,dv \leqq \frac{2}{\pi}\int_{+0}^\infty\left[\int_0^\infty \frac{1-\cos uv}{v^{2-\alpha}}\,dv\right]|d\tau'(u)| =$$

$$= \frac{2\,\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_{+0}^\infty u^{1-\alpha}\,|d\tau'(u)|\,,$$

ce qui prouve (2,10).

b) Lorsque le seul point exceptionnel admis est $a > 0$, alors on peut partir de (2,7) qui est valable, parce qu'on a, en vertu de (2,12), $\tau'(u)\,(\cos av - \cos uv) \to 0$ pour $u \to a$. Donc

$$\int_0^\infty |v^\alpha C_\tau(v)|\,dv \leqq \frac{2}{\pi}\,|\tau'(+0)|\int_0^\infty \frac{1-\cos uv}{v^{2-\alpha}}\,dv +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\left|\frac{\cos av - \cos uv}{v^{2-\alpha}}\right|dv\right]|d\tau'(u)|\,.$$

Substituons, dans l'intégrale intérieure, $v = \dfrac{2w}{|u-a|}$, alors

$$\int_0^\infty\left|\frac{\cos av - \cos uv}{v^{2-\alpha}}\right|dv = 2^\alpha|u-a|^{1-\alpha}\int_0^\infty\left|\sin w.\sin\frac{u+a}{|u-a|}\,w\right|w^{\alpha-2}\,dv \leqq$$

$$\leqq 2^\alpha|u-a|^{1-\alpha}\left\{\int_0^1 w^{\alpha-1}\,dw + \int_1^\infty w^{\alpha-2}\,dw\right\} =$$

$$= 2^\alpha|u-a|^{1-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{2^\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\,|u-a|^{1-\alpha}.$$

Vu que

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos uv}{v^{2-\alpha}}\,dv \leqq \frac{2^\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\,u^{1-\alpha}\,,$$

(2,11) est établi.

c) Le cas général se ramène aux deux cas particuliers par la même décomposition dont nous nous sommes servis dans la démonstration du théorème précédent.

Théorème S. *Soit $\tau(u)$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème* C*; supposons de plus que $\tau(0) = 0$ et que les intégrales*

$$\int_{+0} u \log \frac{1}{u} \, | d\, \tau'(u) | \,, \quad \int^{\infty} u \log u \, | d\, \tau'(u) | \tag{2,13}$$

soient aussi convergentes.

Alors $S_\tau(v) \in L(0, \infty)$. De plus, on a

$$\int_0^{\infty} | S_\tau(v) | \, dv \leq \frac{4}{\pi} \left\{ \int_{+0}^{b_1} u \left(\left| \log \frac{u}{a_1} \right| + 2 \right) | d\, \tau'(u) | + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \int_{b_i}^{b_{i+1}} | u - a_i | \left(\left| \log \left| \frac{u}{a_i} - 1 \right| \right| + 2 \right) | d\, \tau'(u) | \right\} + R \,, \tag{2,14}$$

le terme R dépendant des valeurs $\tau(b_i)$ et $\tau'(b_i \pm 0)$.

En particulier, lorsqu'on n'admet que les deux points exceptionnels 0 et $a > 0$, alors $R = 0$.

Démonstration. Il s'ensuit de la convergence des intégrales (2,1) et (2,13), que

$$u \log u . \tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to 0, \infty \,; (u - a_i) \log | u - a_i | . \tau'(u) \to 0 \text{ pour } u \to a_i \,. \tag{2,15}$$

a) Supposons d'abord qu'il n'y ait que deux points exceptionnels admis, 0 et $a > 0$. En intégrant deux fois par parties, on obtient que

$$\frac{\pi}{2} S_\tau(v) = \left[\tau(u) \left(\frac{\sin av}{a\, v^2} - \frac{\cos uv}{v} \right) \right]_0^{\infty} - \left[\tau'(u) \left(\frac{u \sin av}{a\, v^2} - \frac{\sin uv}{v^2} \right) \right]_{+0}^{a-0} - \left[\; \right]_{a+0}^{\infty}$$

$$+ \int_{+0}^{\infty} \left(\frac{u \sin av}{a\, v^2} - \frac{\sin uv}{v^2} \right) d\tau'(u) \,. \tag{2,16}$$

Les parties intégrées s'annulent en vertu de (2,15). Par conséquent, on a

$$\int_0^{\infty} | S_\tau(v) | \, dv \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \left| \frac{u \sin av}{a\, v^2} - \frac{\sin uv}{v^2} \right| dv \right] | d\tau'(u) | \,. \tag{2,17}$$

Faisons, dans l'intégrale intérieure $J(u)$, la substitution $v = \dfrac{w}{a}$.

En posant $x = \dfrac{u}{a}$ et $y = \dfrac{u}{a} - 1$, un calcul simple fournit:

$$J(u) = u \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin w}{w} - \frac{\sin xw}{xw} \right| \frac{dw}{w} = u\, K(x)$$

et

$$J(u) = |u-a| \int_0^\infty \left| \sin w \frac{1-\cos yw}{yw} + \left(\frac{\sin w}{w} - \frac{\sin yw}{yw} \cos w \right) \right| \frac{dw}{w} \leqq$$

$$\leqq |u-a| \left\{ \int_0^\infty \frac{1-\cos yw}{|y| w^2} dw + \int_0^\infty \left| \frac{\sin w}{w} - \frac{\sin yw}{yw} \cos w \right| \frac{dw}{w} \right\} =$$

$$= |u-a| \left\{ \frac{\pi}{2} + H(y) \right\} .$$

$K(x)$ peut être estimé de la manière suivante:

$$K(x) \leqq \int_0^1 \left(1 - \frac{\sin xw}{xw}\right) \frac{dw}{w} + \int_0^1 \left(1 - \frac{\sin w}{w}\right) \frac{dw}{w} +$$

$$+ \int_1^\infty \left| \frac{\sin w}{w^2} \right| dw + \int_1^\infty \left| \frac{\sin xw}{x w^2} \right| dw = A + B + C + D$$

où

$$A + D = \int_0^x \left(1 - \frac{\sin z}{z}\right) \frac{dz}{z} + \int_x^\infty \left| \frac{\sin z}{z^2} \right| dz \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{z}{6} dz + \left(\int_x^1 \frac{z}{z^2} dz + \int_1^\infty \frac{1}{z^2} dz \right) \leqq -\log x + \frac{13}{12} & \text{pour } 0 < x \leqq 1 , \\ \displaystyle\left(\int_0^1 \frac{z}{6} dz + \int_1^x 2 \frac{dz}{z} \right) + \int_x^\infty \frac{1}{z^2} dz \leqq 2 \log x + \frac{13}{12} & \text{pour } 1 \leqq x , \end{cases}$$

(puisque $0 \leqq 1 - \dfrac{\sin z}{z} \leqq \dfrac{z^2}{6}$ pour $0 \leqq z \leqq 1$); $B < \dfrac{1}{12}$; $C < 1$.

On a donc:

$$J(u) = u K\left(\frac{u}{a}\right) \leqq u \left(2 \left| \log \frac{u}{a} \right| + \frac{26}{12} \right) \leqq 2u \left(\left| \log \frac{u}{a} \right| + 2 \right) . \qquad (2,18)$$

$H(y)$ peut être estimé d'une manière analogue:

$$H(y) \leqq \int_0^1 \left| \cos w - \frac{\sin yw}{yw} \cos w \right| \frac{dw}{w} + \int_0^1 \left| \cos w - \frac{\sin w}{w} \right| \frac{dw}{w} +$$

$$+\int_1^\infty \left|\frac{\sin w}{w^2}\right| dw + \int_1^\infty \left|\frac{\sin yw}{yw^2} \cos w\right| dw = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 \, .$$

Augmentons A_1 et D_1 en écrivant 1 au lieu de $\cos w$; nous arrivons ainsi aux intégrales A et D de toute à l'heure (avec y au lieu de x), donc $A_1 + D_1 \leqq$ $= 2 \left| \log |y| \right| + \frac{13}{12}$. D'autre part: $C_1 \leqq 1$ et $B_1 \leqq \frac{1}{6}$, puisque $0 \leqq$ $\leqq \frac{\sin w}{w} - \cos w \leqq \frac{w^2}{3}$ pour $0 \leqq w \leqq 1$. Il s'ensuit que:

$$J(u) \leqq |u - a| \left(2 \left|\log \left|\frac{u}{a} - 1\right|\right| + 4\right) . \tag{2,19}$$

b étant un point quelconque entre 0 et a, faisons usage de l'inégalité (2,18) pour $0 < u < b$, et de l'inégalité (2,19) pour $b \leqq u < \infty$; (2,17) fournit alors la démonstration du théorème.

b) Le cas général peut être ramené à celui que nous venons d'envisager, par la décomposition dont nous nous sommes déjà servis dans la démonstration du théorème C.

Théorème S'. *Soit $\tau(u)$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème C, avec la différence que nous supposons maintenant la convergence des intégrales*

$$\int_{+0} u^{1-\alpha} \, |d\tau'(u)| , \; \int' |u - a_i|^{1-\alpha} \, |d\tau'(u)| , \; \int^\infty u \, |d\tau'(u)| , \tag{2,20}$$

au lieu de celles (2,1); de plus, soit $\tau(0) = 0$.

Alors $v^\alpha S_\tau(v) \in L(0, \infty)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |v^\alpha S_\tau(v)| \, dv \leqq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \Bigg\{ & \int_{+0}^{b_1} u \left(\frac{1}{u^\alpha} + \frac{1}{a_1^\alpha}\right) |d\tau'(u)| + \\ & + \sum_{i=1}^{s} \int_{b_i}^{b_{i+1}} |u - a_i| \left(\frac{3}{|u - a_i|^\alpha} + \frac{1}{a_i^\alpha}\right) |d\tau'(u)| \Bigg\} + R , \end{aligned} \tag{2,21}$$

le terme R dépendant des valeurs $\tau(b_i)$ et $\tau'(b_i \pm 0)$. En particulier, lorsqu'on n'admet que les deux points exceptionnels 0 et $a > 0$, alors $R = 0$.

Démonstration. Il suffit d'envisager le cas particulier indiqué à la fin du théorème, le cas général y pouvant être réduit par la même décomposition que dans les théorèmes précédents.

La convergence des intégrales (2,20) entraîne les estimations (2,12) avec la seule différence que $u\,\tau'(u) \to 0$ pour $u \to \infty$. Cela nous assure que les parties intégrées au second membre de (2,16) s'annulent et par conséquent

$$\int_0^\infty |v^\alpha S_\tau(v)|\,dv \leq \frac{2}{\pi}\int_{+0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \left|\frac{u \sin av}{a\,v^2} - \frac{\sin uv}{v^2}\right| v^\alpha\,dv\right] |d\,\tau'(u)|. \quad (2,22)$$

Faisons, dans l'intégrale intérieure $J_\alpha(u)$, la substitution $v = \frac{w}{a}$. On obtient par un calcul simple, analogue à celui dans la démonstration du théorème S, que

$$J_\alpha(u) = \frac{u}{a^\alpha} K_\alpha(x) \text{ et } J_\alpha(u) \leq \frac{|u-a|}{a^\alpha}\left\{\frac{2^\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\frac{1}{|y|^\alpha} + H_\alpha(y)\right\}$$

où $x = \frac{u}{a}$, $y = \frac{u}{a} - 1$ et les fonctions $K_\alpha(x)$, $H_\alpha(y)$ sont définies par des intégrales analogues à celles définissant les fonctions $K(x)$ et $H(y)$, avec la seule différence que les fonctions sous les signes d'intégrale sont multipliées par w^α. Comme on a

$$K_\alpha(x) \leq \int_0^\infty \left|\frac{\sin w}{w^{2-\alpha}}\right| dw + \int_0^\infty \left|\frac{\sin xw}{x\,w^{2-\alpha}}\right| dw = \left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)\int_0^\infty \left|\frac{\sin z}{z^{2-\alpha}}\right| dz \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$$

et, d'une manière analogue,

$$H_\alpha(y) \leq \left(1 + \frac{1}{|y|^\alpha}\right)\frac{1}{\alpha(1-\alpha)},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J_\alpha(u) &\leq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\, u \left(\frac{1}{u^\alpha} + \frac{1}{a^\alpha}\right), \\ J_\alpha(u) &\leq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\, |u-a| \left(\frac{3}{|u-a|^\alpha} + \frac{1}{a^\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2,23)$$

b étant un point entre 0 et a, si l'on fait usage de la première de ces inégalités dans l'intervalle $0 < u < b$, et de la seconde dans $b \leq u < \infty$, alors (2,22) fournit la démonstration du théorème.

§ 3. LES CONSTANTES DE LEBESGUE.

$\varphi(u)$ étant une fonction sommatoire donnée, nous allons rechercher les „constantes de Lebesgue" σ_n et $\bar{\sigma}_n$ correspondantes.

Théorème I. *Lorsque $\varphi(u)$ est, dans l'intervalle fermé $0 \leq u \leq 1$, absolument continue et que sa dérivée est à variation bornée dans le voisinage de chaque point à l'exception d'un nombre fini au plus: $0, a_1, \ldots, a_p, 1$ où la variation totale de $\varphi'(u)$ peut devenir infinie, mais cela seulement de la sorte que les intégrales*

$$\int_{+0} u\,|d\varphi'(u)|\,,\ \int' |u-a_i| \log \frac{1}{|u-a_i|}\,|d\varphi'(u)|\,,\ \int^{1-0} (1-u)\log\frac{1}{1-u}\,|d\varphi'(u)|$$

convergent, alors la suite $\{\sigma_n\}$ est bornée. En particulier, lorsqu'on n'admet que le seul point exceptionnel 0 resp. 1, alors

$$\sigma_n \leq \int_{+0}^{1-0} u\,|d\varphi'(u)| + |\varphi'(1-0)| \tag{3,1}$$

resp.

$$\sigma_n \leq |\varphi'(+0)| + \frac{2}{\pi}\int_{+0}^{1-0} (1-u)\left(\log\frac{1+u}{1-u} + 2\right)|d\varphi'(u)|\,. \tag{3,2}$$

Lorsque $\varphi(u)$ est décroissante et convexe, alors $\sigma_n = 1$.

Démonstration. La fonction $\tau(u)$, égale à $\varphi(u)$ dans l'intervalle $0 \leq u \leq 1$ et s'annulant dans $1 \leq u < \infty$, vérifie les hypothèses du théorème C; on a donc $C_\tau(v) \in L(0,\infty)$ et $\int_0^\infty C_\tau(v)\cos uv\,dv = \tau(u)$.

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, sommable dans $0 \leq x \leq 2\pi$ et telle que $|f(x)| \leq 1$. Sa série de Fourier étant (1,1), on a

$$\begin{aligned} f\left(x,\frac{v}{n}\right) &= \frac{1}{2}\left[f\left(x-\frac{v}{n}\right)+f\left(x+\frac{v}{n}\right)\right] \sim \\ &\sim \frac{c_0}{2} + \cos\frac{v}{n}\,.\,c_1(x) + \cos\frac{2v}{n}\,.\,c_2(x) + \ldots, \end{aligned} \tag{3,3}$$

donc

$$\int_0^\infty C_\tau(v) f\left(x,\frac{v}{n}\right)dv = \tau(0)\frac{c_0}{2} + \tau\left(\frac{1}{n}\right)c_1(x) + \tau\left(\frac{2}{n}\right)c_2(x) + \ldots =$$

$$= \sigma_n(f;x)\,.$$

Comme $|f(x, \frac{v}{n})| \leqq 1$, il s'ensuit que $\sigma_n(f)$, et par conséquent aussi la borne supérieure σ_n, sont inférieures à l'intégrale de $|C_\tau(v)|$ dans $0 \leqq u < \infty$. Les inégalités (3,1) et (3,2) s'ensuivent de celles (2,3) et (2,4) du théorème C.

Lorsque $\varphi(u)$ est décroissante et convexe, alors le second membre de (3,1) est égal à 1. Comme on a pour la fonction $f(x) \equiv 1$, $\sigma_n(f) = 1$, il s'ensuit que $\sigma_n = 1$.

Le théorème I est donc démontré.

Lorsque les hypothèses du théorème I ne sont pas remplies en un point u (par exemple lorsque $\varphi(u)$ n'y est pas continue, ou lorsque l'intégrale correspondante diverge), alors nous disons que ce point soit (I)-*singulier*. Le théorème suivant généralise le précédent au cas où les extrémités de l'intervalle (0,1) peuvent être (I)-singulières.

Théorème I*. *Lorsque $\varphi(u)$ est absolument continue dans l'intérieur de l'intervalle* (0,1)[16] *et que sa dérivée vérifie celles des hypothèses du théorème* I *qui se rapportent aux points intérieurs, alors*

$$\sigma_n = O(1) + O\left[\int_{\frac{1}{n}} u\,|d\varphi'(u)| + \left|1 - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{1}{n}+0\right)\right|\right] +$$

$$+ O\left[\int^{1-\frac{1}{n}} (1-u)\log\frac{1}{1-u}\,|d\varphi'(u)| + \log n\left|\varphi\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi'\left(1-\frac{1}{n}-0\right)\right|\right].$$

Lorsque le point 0 *resp.* 1 *n'est pas* (I)-*singulier, alors la seconde resp. la troisième expression au second membre peut être supprimée.*

Démonstration. Soit, pour n donné, $\tau_n(u)$ la fonction qui coïncide au point 0 et dans les intervalles $\frac{1}{n} \leqq u \leqq 1 - \frac{1}{n}$, $1 \leqq u < \infty$ avec la fonction $\tau(u)$ définie plus haut, et est linéaire dans les intervalles $0 \leqq u \leqq \frac{1}{n}$, $1 - \frac{1}{n} \leqq u \leqq 1$. Les fonctions $\tau_n(u)$ et $\tau(u)$ coïncidant en particulier aux points $u = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, (3,4) reste valable si l'on remplace τ par τ_n. Par conséquent, σ_n est inférieur à l'intégrale de $|C_{\tau_n}|$ dans $(0, \infty)$. En appliquant l'inégalité (2,2) et en observant que $d\tau_n'(u) = d\varphi'(u)$

[16] Cela veut dire que dans tout intervalle $(\epsilon, 1-\epsilon)$ $(\epsilon > 0)$.

dans l'intervalle $\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$, $d\tau_n'(u) = 0$ dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et $\left(1-\frac{1}{n}, 1\right)$, et que les sauts de $\tau_n'(u)$ aux points $\frac{1}{n}$ et $1-\frac{1}{n}$ sont:

$$d\tau_n'\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{n}+0\right) - n\left(1-\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$d\tau_n'\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\varphi\left(1-\frac{1}{n}\right) - \varphi'\left(1-\frac{1}{n}-0\right),$$

on obtient l'énoncé du théorème.

Lorsque le point 0 resp. 1 n'est pas (I)-singulier, alors il est superflu de modifier $\tau(u)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ resp. $\left(1-\frac{1}{n}, 1\right)$, ce qui motive le dernier énoncé du théorème.

Théorème II. *Lorsque $\varphi(u)$ vérifie les hypothèses du théorème I, alors*

$$\bar{\sigma}_n = O(1) + O\left\{\int_{\frac{1}{n}} u \log\frac{1}{u}\,|d\varphi'(u)| + \log n \left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{1}{n}+0\right)\right|\right\} +$$

$$+ O\left\{\int^{1-\frac{1}{n}} (1-u)\log\frac{1}{1-u}\,|d\varphi'(u)| + \log n \left|\varphi\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi'\left(1-\frac{1}{n}-0\right)\right|\right\}.$$

Lorsque le point 1 n'est pas (I)-singulier, alors la dernière expression au second membre peut être supprimée.

Démonstration. Soit $\tau_n(u)$ la fonction s'annulant au point 0 et dans l'intervalle $1 \leqq u < \infty$, égale à $\varphi(u)$ dans l'intervalle $\frac{1}{n} \leqq u \leqq 1-\frac{1}{n}$ et linéaire dans les intervalles $0 \leqq u \leqq \frac{1}{n}$ et $1-\frac{1}{n} \leqq u \leqq 1$. Cette fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème S, on a $S_{\tau_n}(v) \in L(0, \infty)$ et $\int_0^\infty S_{\tau_n}(v) \sin uv\, dv = \tau_n(u)$.

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, sommable et telle que $|f(x)| \leqq 1$. Sa série de Fourier étant (1,1), on a

$$g\left(x, \frac{v}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(x-\frac{v}{n}\right) - f\left(x+\frac{v}{n}\right)\right] \sim$$

$$\sim 0 + \sin\frac{v}{n} \cdot \bar{c}_1(x) + \sin\frac{2v}{n} \cdot \bar{c}_2(x) + \dots,$$

donc

$$\int_0^\infty S_{\tau_n}(v)\, g\left(x, \frac{v}{n}\right) dv = \sum_{k=1}^\infty \tau_n\left(\frac{k}{n}\right) \bar{c}_k(x) = \bar{\sigma}_n(f; x) .$$

Comme $\left| g\left(x, \frac{v}{n}\right)\right| \leqq 1$, il s'ensuit que $|\bar{\sigma}_n(f; x)|$, et par conséquent aussi la borne supérieure $\bar{\sigma}_n$, sont inférieures à l'intégrale de $|S_{\tau_n}(v)|$ dans $(0, \infty)$.

En appliquant l'inégalité (2,14) du théorème S à la fonction $\tau_n(u)$ et en observant que les sauts de $\tau_n'(u)$ aux points $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ sont:

$$d\tau_n'\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{n} + 0\right) - n\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) .$$

$$d\tau_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\,\varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \varphi'\left(1 - \frac{1}{n} - 0\right) ,$$

on obtient l'énoncé du théorème.

Théorème II*. *Lorsque la fonction $\varphi(u)$ est décroissante et convexe dans $0 \leqq u \leqq 1$, alors*

$$\bar{\sigma}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2i+1} \varphi\left(\frac{2i+1}{n}\right) \quad \left(N = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) . \tag{3,4}$$

D'une manière plus générale, lorsque $\varphi(u)$ peut être décomposée en somme d'une fonction $\lambda(u)$ décroissante et convexe dans $0 \leqq u \leqq 1$ et s'annulant au point 1, et d'une fonction $\mu(u)$ qui, continuée dans l'intervalle $(1, \infty)$ en posant $\mu(u) = 0$, satisfait aux hypothèses du théorème S, alors

$$\bar{\sigma}_n = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\lambda(u)}{u} du + O(1) . \tag{3,5}$$

Démonstration. Le premier énoncé est un cas particulier d'un théorème de l'auteur ([1], p. 112). Pour le montrer, on part de la relation facile à vérifier:

$$\bar{\sigma}_n(f; x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A_n(y)\, g(x, y)\, dy$$

où

$$g(x,y) = \frac{1}{2}[f(x-y) - f(x+y)], \quad A_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sin ky.$$

En vertu d'un théorème de Fejér[17] sur les séries des sinus aux coefficients formant une suite convexe et tendant vers 0, la fonction $A_n(y)$ a toujours le même signe que $\sin y$. On a donc

$$|\bar{\sigma}_n(f;x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |A_n(y)|\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi A_n(y)(\operatorname{sgn}\sin y)\,dy = -\bar{\sigma}_n(s;0)$$

où

$$s(x) = \operatorname{sgn}\sin x = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin(2i+1)x}{2i+1}.$$

Comme $-\bar{\sigma}_n(s;0)$ est égal à la somme figurant au second membre de (3,4), et comme $s(x)$ appartient, elle aussi, à la classe des fonctions envisagées: $|s(x)| \leq 1$, l'équation (3,4) est démontrée.

La fonction $\dfrac{\varphi(u)}{u}$ étant, en même temps que $\varphi(u)$, décroissante et convexe, on a

$$\frac{4}{\pi}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2}{n}}^{1}\frac{\varphi(u)}{u}\,du \leq \bar{\sigma}_n \leq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\varphi(u)}{u}\,du,$$

donc

$$\bar{\sigma}_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\varphi(u)}{u}\,du + O(1).$$

Pour démontrer (3,5), on n'a qu'à observer que la différence des deux sommes $\bar{\sigma}_n(f;x)$, correspondant respectivement aux fonctions sommatoires $\varphi(u)$ et $\lambda(u)$, est inférieure en module à une borne indépendante de n, quelle que soit la fonction $f(x)$ telle que $|f(x)| \leq 1$.

En effet, cette différence est égale à

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\frac{k}{n}\right)\bar{c}_k(x) = \int_0^\infty S_\mu(v)\,g\left(x,\frac{v}{n}\right)dv,$$

donc est inférieure en module à l'intégrale de la fonction $|S_\mu(v)|$ dans $(0, \infty)$.

[17] *Fejér* [1].

§ 4. CONSTANTES D'APPROXIMATION.

Soir r un nombre positif donné (non nécessairement entier). La fonction $f(x)$ et sa conjuguée $\bar{f}(x)$ ayant les séries de Fourier (1,1) et (1,2), désignons par $f^{[r]}(x)$ resp. par $f^{\{r\}}(x)$ la fonction (lorsqu'une telle existe) dont la série de Fourier est

$$0 + c_1(x) + 2^r c_2(x) + 3^r c_3(x) + \dots$$

resp.

$$0 + \bar{c}_1(x) + 2^r \bar{c}_2(x) + 3^r \bar{c}_3(x) + \dots .$$

Pour $r = 1, 3, 5, \dots$ on a évidemment $f^{[r]}(x) = (-1)^{\frac{r-1}{2}} \bar{f}^{(r)}(x)$ et $f^{\{r\}}(x) = (-1)^{\frac{r+1}{2}} f^{(r)}(x)$, et pour $r = 2, 4, 6, \dots$ on a $f^{[r]}(x) = (-1)^{\frac{r}{2}} f^{(r)}(x)$ et $f^{\{r\}}(x) = (-1)^{\frac{r}{2}} \bar{f}^{(r)}(x)$.

Il s'ensuit que si l'on définit les quantités $\varrho_n^{[r]}$, $\varrho_n^{[r]\alpha}$, $\varrho_n^{\{r\}}$ et $\varrho_n^{\{r\}\alpha}$ correspondant à une fonction sommatoire donnée $\varphi(u)$, comme les limites supérieures de $\varrho_n(f)$ quand f parcourt toutes les fonctions telles que $f^{[r]}(x)$ resp. $f^{\{r\}}(x)$ satisfont à la condition b) resp. c) du § 1 (au lieu de $f^{(r)}(x)$), alors on a:

pour $r = 1, 3, 5, \dots$: $\varrho_n^{[r]} = \bar{\varrho}_n^{(r)}$, $\varrho_n^{[r]\alpha} = \bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$, $\varrho_n^{\{r\}} = \varrho_n^{(r)}$, $\varrho_n^{\{r\}\alpha} = \varrho_n^{(r)\alpha}$,

pour $r = 2, 4, 6, \dots$: $\varrho_n^{[r]} = \varrho_n^{(r)}$, $\varrho_n^{[r]\alpha} = \varrho_n^{(r)\alpha}$, $\varrho_n^{\{r\}} = \bar{\varrho}_n^{(r)}$, $\varrho_n^{\{r\}\alpha} = \bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$.

En vertu du théorème de Privaloff, mentionné au § 1, $\varrho_n^{[r]\alpha}$ et $\varrho_n^{\{r\}\alpha}$ ont le même ordre de grandeur, il suffit donc d'envisager le premier.

Théorème III. *Lorsque* $\varphi(u)$ *satisfait aux hypothèses du théorème* I *et que de plus, les intégrales*

$$\int_{+0} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \int' |u - a_i|^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|, \int^{1-0} (1-u)^{1-\alpha} |d\varphi'(u)|$$

convergent pour une quantité α *entre* 0 *et* 1, *alors* $\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. *En particulier, lorsqu'on n'admet que le seul point exceptionnel* 0 *resp.* 1, *alors on a*

$$\varrho_n^\alpha \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{2F(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \left\{ \int_{+0}^{1-0} u^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| + |\varphi'(1-0)| \right\} \quad (4,1)$$

resp.

$$\varrho_n^\alpha \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{2^{1+\alpha}}{\pi\alpha(1-\alpha)} \left\{ |\varphi'(+0)| + \int_0^{1-0} (1-u)^{1-\alpha} |d\varphi'(u)| \right\} . \quad (4,2)$$

3

Démonstration. La fonction $\tau(u)$ coïncidant avec $\varphi(u)$ dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ et s'annulant dans $1 \leqq u < \infty$, satisfait aux hypothèses des théorèmes C et C^{α}, donc $C_\tau(v) \in L(0, \infty)$ et $v^{\alpha} C_\tau(v) \in L(0, \infty)$.

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, vérifiant la condition de Lipschitz: $|f(x+h) - f(x)| \leqq |h|^{\alpha}$. La fonction

$$f(x) - f\left(x, \frac{v}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left(x - \frac{v}{n}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left(x + \frac{v}{n}\right)\right]$$

reste en module inférieure à $\frac{v^{\alpha}}{n^{\alpha}}$. La série de Fourier de $f(x)$ étant (1,1), celle de $f(x) - f\left(x, \frac{v}{n}\right)$ est

$$0 + \left(1 - \cos\frac{v}{n}\right) c_1(x) + \left(1 - \cos\frac{2v}{n}\right) c_2(x) + \ldots,$$

d'où il s'ensuit, vu aussi que $\tau(0) = \varphi(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} C_\tau(v)\left[f(x) - f\left(x, \frac{v}{n}\right)\right] dv &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \tau\left(\frac{k}{n}\right)\right) c_k(x) = \\ &= f(x) - \sigma_n(f; x). \end{aligned} \tag{4,3}$$

Par conséquent,

$$\varrho_n(f) = \max_x \left| f(x) - \sigma_n(f; x) \right| \leqq \frac{1}{n^{\alpha}} \int_0^{\infty} |C_\tau(v)|\, v^{\alpha}\, dv, \tag{4,4}$$

ce qui prouve que $\varrho_n^{\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$. Les inégalités (4,1) et (4,2) s'ensuivent de celles (2,10) et (2,11) du théorème C^{α}.

Appelons un point (III)-*singulier* par rapport à la fonction $\varphi(u)$ si les conditions du théorème III n'y sont pas remplies. Le théorème suivant généralise le précédent au cas où les extrémités de l'intervalle peuvent être (III)-singulières par rapport à $\varphi(u)$.

Théorème III*. *Lorsque $\varphi(u)$ est absolument continue dans l'intérieur de l'intervalle* (0,1) *et que sa dérivée vérifie les hypothèses du théorème* III *se rapportant aux points intérieurs, alors*

$$\varrho_n^{\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^\alpha}\int\limits_{\frac{1}{n}} u^{1-\alpha}\,|\,d\varphi'(u)\,| + \left|\frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{1}{n}+0\right) - 1 + \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right\} +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^\alpha}\int^{1-\frac{1}{n}} (1-u)^{1-\alpha}\,|\,d\varphi'(u)\,| + \left|\varphi\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\varphi'\left(1-\frac{1}{n}-0\right)\right|\right\}.$$

Lorsque le point 0 *resp.* 1 *n'est pas* (III)*-singulier par rapport à* $\varphi(u)$, *alors la seconde resp. la troisième expression au second membre peut être supprimée.*

Démonstration. Pour n donné, nous remplaçons la fonction $\tau(u)$ ci-dessus par la fonction $\tau_n(u)$ définie dans la démonstration du théorème I. La relation (4,3), et par conséquent aussi l'inégalité (4,4) restant valables, on n'a qu'à appliquer le théorème C'' à la fonction $\tau_n(u)$.

Théorème IV. *Soit, pour* $r > 0$ *donné,* $\psi_r(u) = u^{-r}(1-\varphi(u))$ *dans l'intervalle* $0 < u \leq 1$. *Supposons que* $\psi_r(0) = \psi_r(+0)$ *existe et que* $\psi'_r(u)$ *vérifie, dans l'intervalle fermé* $0 \leq u \leq 1$, *les mêmes hypothèses que nous avons faites, dans le théorème* I, *pour la fonction* $\varphi(u)$ *elle-même.*

Alors $\varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. *En particulier, lorsqu'on n'admet que le seul point exceptionnel* 0, *alors*

$$\varrho_n^{[r]} \leq \frac{1}{n^r}\left\{\int_{+0}^{1-0} u\,|\,d\psi'_r(u)\,| + \left|r + \psi'_r(1-0)\right| + r + 1\right\}. \qquad (4,5)$$

Démonstration. La fonction $\tau(u)$ égale à $\psi'_r(u)$ pour $0 \leq u \leq 1$ et à u^{-r} pour $1 \leq u < \infty$, vérifie les hypothèses du théorème C ; donc on a $C_\tau(v) \in L(0,\infty)$ et $\int_0^\infty C_\tau(v)\cos uv\,dv = \tau(u)$.

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, telle que $f^{[r]}(x)$ existe et est bornée en module par 1. La série de Fourier de $f(x)$ étant (1,1), on a

$$f_r\left(x,\frac{v}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[f^{[r]}\left(x-\frac{v}{n}\right) + f^{[r]}\left(x+\frac{v}{n}\right)\right] \sim \sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{kv}{n}\,.\,k^r c_k(x) \;,$$

donc

$$\int_0^\infty C_\tau(v) f_r\left(x,\frac{v}{n}\right)dv = \sum_{k=1}^{\infty}\tau\left(\frac{k}{n}\right)k^r c_k(x) = n^r\left[f(x) - \sigma_n(f;x)\right]. \quad (4,6)$$

3*

Comme $\left| f_r \left(x, \frac{\nu}{n} \right) \right| \leqq 1$, il s'ensuit que $n^r \varrho_n(f)$, et par conséquent aussi la borne supérieure de ces quantités lorsque f parcourt toutes les fonctions du type considéré, sont inférieures à l'intégrale de $|C_r(\nu)|$ dans $(0, \infty)$. Nous avons donc prouvé que $\varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. L'inégalité (4,5) est une conséquence de l'inégalité (2,3) du théorème C.

Lorsqu'on ne suppose rien sur l'allure de $\psi_r(u)$ au voisinage des extrémités de l'intervalle (0,1), c'est-à-dire que si celles-ci peuvent être des points (IV)-singuliers, alors on peut énoncer le théorème plus général que voici:

Théorème IV*. *Lorsque $\psi_r(u) = u^{-r}(1 - \varphi(u))$ est absolument continue dans l'intérieur de l'intervalle* (0,1) *et que sa dérivée y vérifie les hypothèses faites dans le théorème* I *pour la dérivée de la fonction $\varphi(u)$ elle-même, alors*

$$\varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left\{\frac{1}{n^r}\int_{\frac{1}{n}} u\,|d\,\psi_r'(u)|\right\} +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^r}\int^{1-\frac{1}{n}} (1-u)\log\frac{1}{1-u}\,|d\,\psi_r'(u)| + \right.$$

$$\left. + \frac{\log n}{n^r}\left|1 - \psi_r\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\psi_r'\left(1-\frac{1}{n}-0\right)\right|\right\}.$$

Lorsque le point 1 *n'est pas* (IV)*-singulier, alors la troisième expression au second membre peut être supprimée.*

Démonstration. Pour n donné, on remplace la fonction $\tau(u)$ figurant dans la démonstration du théorème précédent par la fonction $\tau_n(u)$ qui coïncide avec $\tau(u)$ pour $\frac{1}{n} \leqq u \leqq 1 - \frac{1}{n}$ et pour $1 \leqq u < \infty$, est linéaire dans les intervalles $0 \leqq u \leqq \frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n} \leqq u \leqq 1$ et dont la dérivée est continue au point $\frac{1}{n}$. Cette fonction coïncidant avec $\tau(u)$ en particulier aux points $\frac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, (4,6) est valable aussi pour elle. (Il convient d'observer que la valeur de $\tau(u)$ au point 0 n'y intervient pas!)

On a donc

$$\varrho_n^{[r]} \leq \frac{1}{n^r} \int_0^\infty | C_{\tau_n}(v) | \, dv \, .$$

En appliquant le théorème C à la fonction $\tau_n(u)$, on obtient le théorème IV*.

Une estimation asymptotiquement précise est fournie par le

Théorème IV**. *Supposons que la fonction qui est égale à $u^{-r}(1-\varphi(u))$ pour $0 < u \leq 1$ et à u^{-r} pour $1 \leq u < \infty$, puisse être décomposée en somme d'une fonction $\lambda(u)$ décroissante et triplement monotone, et d'une fonction $\mu(u)$ vérifiant les hypothèses du théorème C. Alors*

$$\varrho_n^{[r]} = \frac{1}{n^r} \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^r}\right) .$$

Démonstration. Soit $f(x)$ telle que $| f^{[r]}(x) | \leq 1$. Sa série de Fourier étant (1,1), faisons la décomposition

$$f(x) - \sigma_n(f\,;x) = \varLambda_n(f\,;x) + M_n(f\,;x)$$

où

$$\varLambda_n(f\,;x) \sim \frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{k}{n}\right) k^r c_k(x) \,, \quad M_n(f\,;x) \sim \frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\frac{k}{n}\right) k^r c_k(x) \,.$$

On montre à l'analogie de (4,6) que

$$M_n(f\,;x) = \frac{1}{n^r} \int_0^\infty C_\mu(v) f_r\left(x, \frac{v}{n}\right) dv \,,$$

donc $| M_n(f;\,x) |$ est inférieur à la quantité $\frac{1}{n^r} \int_0^\infty | C_\mu(v) | \, dv$, quelle que soit la fonction $f(x)$ du type considéré.

D'autre part, on a

$$\left| \varLambda_n(f\,;x) \right| \leq \frac{1}{n^r} \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right)$$

et cette borne est atteinte par exemple par la fonction pour laquelle $f^{[r]}(x) =$ $=$ sgn cos x. Cela s'ensuit d'un théorème général de l'auteur,[18] affirmant que si

$$0 + d_1(x) + d_2(x) + \ldots$$

[18] *Sz. Nagy* [1], p. 110.

est la série de Fourier d'une fonction périodique sommable $g(x)$, telle que $|g(x)| \leq 1$, et si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est une suite triplement monotone et tendant vers 0, alors

$$0 + \lambda_1 d_1(x) + \lambda_2 d_2(x) + \ldots$$

est la série de Fourier d'une fonction continue $G(x)$ satisfaisant à l'inégalité

$$|G(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \lambda_{2i+1},$$

le signe d'égalité étant valable par exemple pour la fonction

$$g(x) = \operatorname{sgn} \cos x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \cos(2i+1)x$$

au point $x = 0$.

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème V. *Soit* $\psi_r(u) = u^{-r}(1 - \varphi(u))$. *Supposons que* $\psi_r(0) = \psi_r(+0)$ *existe et est égal à 0 et que* $\psi_r(u)$ *vérifie, dans l'intervalle fermé* $0 \leq u \leq 1$, *les hypothèses que nous avons faites, dans le théorème* I, *pour la fonction* $\varphi(u)$ *elle-même. De plus, l'intégrale*

$$\int_{+0} u \log \frac{1}{u} |d\psi_r'(u)|$$

soit aussi convergente. Alors

$$\varrho_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Démonstration. La fonction $\tau(u)$, égale à $\psi_r(u)$ pour $0 \leq u \leq 1$ et à u^{-r} pour $1 \leq u < \infty$, vérifie les hypothèses du théorème S, donc on a: $S_\tau(v) \in L(0, \infty)$ et $\int_0^\infty S_\tau(v) \sin uv \, dv = \tau(u)$.

Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, telle que $f^{(r)}(x)$ existe et est borné en module par 1. Sa série de Fourier étant (1,1), on a

$$g_r\left(x, \frac{v}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[f^{(r)}\left(x + \frac{v}{n}\right) - f^{(r)}\left(x - \frac{v}{n}\right)\right] \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{kv}{n} \cdot k^r c_k(x)$$

et

$$\int_0^\infty S_\tau(v) g_r\left(x, \frac{v}{n}\right) dv = \sum_{k=1}^{\infty} \tau\left(\frac{k}{n}\right) k^r c_k(x) = n^r \left[f(x) - \sigma_n(f; x)\right]. \quad (4,7)$$

Comme $\left| g_r\left(x, \frac{v}{n}\right) \right| \leq 1$, on en déduit que

$$\varrho_n(f) = \max_x |f(x) - \sigma_n(f; x)| \leq \frac{1}{n^r} \int_0^\infty |S_\tau(v)| \, dv \, ;$$

la même inégalité étant valable alors aussi pour la borne supérieure $\varrho_n^{|r|}$, ce qui fut à démontrer.

Appelons un point (V)-*singulier*, lorsque les hypothèses du théorème V n'y sont pas remplies. Pour le cas où les extrémités de l'intervalle (0,1) peuvent être des points (V)-singuliers, on a le

Théorème V*. *Lorsque* $\psi_r(u) = u^{-r}(1 - \varphi(u))$ *est absolument continue dans l'intérieur de l'intervalle* (0,1) *et que sa dérivée y vérifie les hypothèses faites dans le théorème* I *pour la dérivée de la fonction* $\varphi(u)$ *elle-même, alors*

$$\varrho_n^{|r|} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^r} \int_{\frac{1}{n}} u \log \frac{1}{u} \, |d\, \psi'_r(u)| + \frac{\log n}{n^r} \left| \frac{1}{n} \psi'_r\left(\frac{1}{n} + 0\right) - \psi_r\left(\frac{1}{n}\right) \right| \right\} +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^r} \int^{1-\frac{1}{n}} (1-u) \log \frac{1}{1-u} \, |d\, \psi'_r(u)| + \frac{\log n}{n^r} \left| 1 - \psi_r\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \psi'_r\left(1 - \frac{1}{n} - 0\right) \right| \right\}.$$

Lorsque 0 *resp.* 1 *n'est pas un point* (V)-*singulier, alors la seconde resp. la troisième expression au second membre peut être supprimée.*

Démonstration. Pour n donné, on remplace la fonction $\tau(u)$ figurant dans la démonstration du théorème précédent par la fonction $\tau_n(u)$ qui *s'annule au point* 0, coïncide avec $\tau(u)$ pour $\frac{1}{n} \leq u \leq 1 - \frac{1}{n}$ et $1 \leq u < \infty$, et est linéaire dans les intervalles $0 \leq u \leq \frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n} \leq u \leq 1$. Par le raisonnement déjà familier, on montre que

$$\varrho_n^{|r|} \leq \frac{1}{n^r} \int_0^\infty |S_{\tau_n}(v)| \, dv \, ,$$

puis on applique le théorème S.

Une estimation asymptotiquement précise est fournie par le

Théorème V**. *Supposons que la fonction, égale à $u^{-r}(1-\varphi(u))$ pour $0 < u \leqq 1$ et à u^{-r} pour $1 \leqq u < \infty$, puisse être décomposée en somme d'une fonction $\lambda(u)$ décroissante, convexe et telle que $\int^{\infty} \frac{\lambda(u)}{u}\, du$ converge, et d'une fonction $\mu(u)$ vérifiant les hypothèses du théorème* S. *Alors*

$$\varrho_n^{[r]} = \frac{1}{n^r}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de période 2π telle que $|f^{[r]}(x)| \leqq 1$. Définissons les fonctions $\Delta_n(f;x)$ et $M_n(f;x)$ comme dans la démonstration du théorème IV**.

On montre à l'analogie de (4,7) que

$$|M_n(f;x)| \leqq \frac{1}{n^r}\int_0^{\infty} |S_\mu(v)|\, dv .$$

D'autre part, on a

$$|\Delta_n(f;x)| \leqq \frac{1}{n^r}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right) \tag{4,8}$$

et cette borne est atteinte par exemple par la fonction pour laquelle $f^{[r]}(x) = \operatorname{sgn} \sin x$.

Pour le montrer, envisageons la suite $\lambda_k = \lambda\left(\frac{k}{n}\right)$ $(k = 1,2\ldots)$.

Elle étant décroissante et telle que $\sum \frac{\lambda_k}{k}$ converge, un théorème de W. H. Young[19] affirme que la série

$$\sum \lambda_k \sin kx$$

est convergente et que sa somme, $A_n(x)$, est sommable dans $(0,2\pi)$. La suite λ_k étant de plus convexe, le théorème déjà cité de Fejér affirme que $A_n(x)$ a toujours le même signe que la fonction $s(x) = \operatorname{sgn} \sin x$.

En se servant de la relation facile à vérifier:

$$\Delta_n(f;x) = \frac{1}{n^r \pi}\int_0^{2\pi} A_n(y) f^{[r]}(x+y)\, dy , \tag{4,9}$$

[19] Cf. p. ex. *Zygmund* [*], p. 112.

on obtient que

$$|\Delta_n(f;x)| \leq \frac{1}{n^r \pi}\int_0^{2\pi} |A_n(y)|\,dy = \frac{1}{n^r \pi}\int_0^{2\pi} A_n(y)\, s(y)\, dy = \Delta_n(s_r\,;\,0)\ ,$$

$s_r(x)$ désignant la fonction (à valeur moyenne 0) pour laquelle $s_r^{[r]}(x) = s(x)$, c'est-à-dire la fonction

$$s_r(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\cos(2i+1)x}{(2i+1)^{r+1}}\ .$$

Or, $\Delta_n(s_r;0)$ est évidemment égal à l'expression figurant au second membre de (4,8).

Théorème VI. *Soit* $\psi_r(u) = u^{-r}(1-\varphi(u))$. *Supposons que* $\psi_r(0) = \psi_r(+0)$ *existe et est égal à* 0 *et que* $\psi_r(u)$ *vérifie, dans l'intervalle fermé* $0 \leq u \leq 1$, *les hypothèses que nous avons faites, dans le théorème* I, *pour la fonction* $\varphi(u)$, *avec la différence que nous exigeons maintenant la convergence aussi des intégrales suivantes :*

$$\int_{+0} u^{1-\alpha}|d\,\psi_r'(u)|\,,\ \int' |u-a_i|^{1-\alpha}|d\,\psi_r'(u)|\,,\ \int^{1-0}(1-u)^{1-\alpha}|d\,\psi_r'(u)|\,,$$

α étant une quantité donnée entre 0 *et* 1. *Alors*

$$\varrho_n^{[r]\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)\ .$$

Démonstration. Soient $\tau(u)$ et $g_r\left(x, \frac{v}{n}\right)$ tout comme dans la démonstration du théorème V. Lorsque la fonction $f(x)$, de période 2π, satisfait à la condition $|f^{[r]}(x+h) - f^{[r]}(x)| \leq |h|^\alpha$, alors $\left|g_r\left(x, \frac{v}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{2v}{n}\right|^\alpha$ et, en vertu de (4,7),

$$\varrho_n(f) \leq \frac{2^\alpha - 1}{n^{r+\alpha}}\int_0^\infty |S_\mu(v)|\, v^\alpha\, dv\ . \tag{4,10}$$

L'intégrale au second membre convergeant en vertu du théorème S^α, le théorème VI est démontré.

D'une manière plus générale, on a le

Théorème VI*. *Lorsque* $\psi_r(u) = u^{-r}(1-\varphi(u))$ *est absolument continue dans l'intérieur de l'intervalle* (0,1) *et que sa dérivée y vérifie les hypothèses faites dans le théorème* I *pour la dérivée de* $\varphi(u)$, *et que de plus, les intégrales*

$$\int' |u-a_i|^{1-\alpha} |d\,\psi_r'(u)|$$

convergent, alors

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^{r+\alpha}}\int_{\frac{1}{n}} u^{1-\alpha} |d\,\psi_r'(u)| + \frac{1}{n^r}\left|\frac{1}{n}\psi_r'\left(\frac{1}{n}+0\right) - \psi_r\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right\} +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^{r+\alpha}}\int^{1-\frac{1}{n}} (1-u)^{1-\alpha} |d\psi_r'(u)| + \frac{1}{n^r}\left|1 - \psi_r\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\psi_r'\left(1-\frac{1}{n}-0\right)\right|\right\}.$$

t

Lorsque le point 0 *resp.* 1 *n'es pas* (VI)*-singulier, alors la seconde resp. la troisième expression au second membre peut être supprimée.*

Démonstration. Le même raisonnement que dans la démonstration du théorème V* et l'application du théorème S^{α}.

Une estimation asymptotiquement précise est fournie par le

Théorème VI**. *Supposons que la fonction, égale à $u^{-r}(1-\varphi(u))$ pour $0 < u \leqq 1$ et à u^{-r} pour $1 \leqq u < \infty$, puisse être décomposée en somme d'une fonction $\lambda(u)$ décroissante, convexe et telle que $\int^{\infty} \frac{\lambda(u)}{u}\,du$ converge, et d'une fonction $\mu(u)$ vérifiant les hypothèses du théorème S^{α}. Alors*

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = \frac{1}{n^r}\sum_{i=0}^{\infty} e_{\alpha i}\cdot\lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

où

$$e_{\alpha i} = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\sin(2i+1)\,t\,dt\ .$$

Démonstration. Soit $f(x)$ de période 2π, telle que

$$|f^{|r|}(x+h) - f^{|r|}(x)| \leqq |h|^{\alpha}. \tag{4,11}$$

Les fonctions $\Lambda_n(f\,;x)$ et $M_n(f\,;x)$ soient comme dans la démonstration du théorème IV**.

On montre, à l'analogie de (4,10) et que

$$|M_n(f;x)| \leq \frac{2\alpha - 1}{n^{r+\alpha}} \int_0^\infty v^\alpha |S_\mu(v)|\, dv ,$$

l'intégrale au second membre convergeant en vertu du théorème S^α.

D'autre part, on a

$$|\varDelta_n(f;x)| \leq \frac{1}{n^r} \sum_{i=0}^{\infty} e_{\alpha i}\, \lambda\left(\frac{2i+1}{n}\right), \tag{4,12}$$

et cette borne est atteinte par une fonction du type envisagé.

Pour le montrer, partons de la relation (4,9), que nous pouvons écrire grâce à la périodicité et à la propriété: $A_n(x) = -A_n(-x)$, aussi sous la forme:

$$\varDelta_n(f;x) = \frac{1}{n^r \pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(y) \left(f^{|r|}(x+y) - f^{|r|}(x-y) \right) dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_n(y) \left(f^{|r|}(x+y) - f^{|r|}(x+2\pi-y) \right) dy \right\} .$$

De là, on obtient grâce à la propriété (4,11):

$$|\varDelta_n(f;x)| \leq \frac{1}{n^r \pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(y)\, |2y|^\alpha\, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A_n(y)\, |2(\pi - y)|^\alpha\, dy \right\} =$$

$$= \varDelta_n(s_{r,\alpha};0),$$

$s_{r,\alpha}(x)$ désignant la fonction de période 2π et à valeur moyenne 0, pour laquelle $s_{r,\alpha}^{|r|}(x)$ est la fonction impaire, de période 2π, qui est égale à $2^{\alpha-1} x^\alpha$ dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et à $2^{\alpha-1}(\pi - x)^\alpha$ dans $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, c'est-à-dire

$$s_{r,\alpha}^{|r|}(x) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin(2i+1)t\, dt \,.\, \sin(2i+1)x . \tag{4,13}$$

La fonction $s_{r,\alpha}(x)$ a donc le développement:

$$s_{r,\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_{\alpha i}}{(2i+1)^r} \cos(2i+1)x\ .$$

Il est facile à montrer que cette fonction jouit aussi de la propriété (4,11).

$\Delta_n(s_{r,\alpha};0)$ étant égal au second membre de l'inégalité (4,12), le théorème est démontré.

§ 5. QUELQUES APPLICATIONS.

A) *Sommes de Fejér (fonction sommatoire: $\varphi(u) = 1 - u$).*

$\varphi(u)$ étant décroissante et convexe, on a par le théorème I: $\sigma_n = 1$ (résultat bien connu de Fejér) et par le théorème II:

$$\bar{\sigma}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(1 - \frac{2i+1}{n}\right)^+ = \frac{2}{\pi} \log n + O(1)\ .$$ [20]

L'inégalité (4,1) du théorème III fournit que

$$\varrho_n^\alpha \leqq \frac{1}{n^\alpha} \frac{2\,\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \sin \frac{\alpha\pi}{2}\ .$$ [21]

La fonction $\psi_r(u)$ est égale à u^{1-r}. Pour $r = 1$, elle est donc égale à 1. L'inégalité (4,5) du théorème IV donne:

$$\varrho_n^{[1]} \leqq \frac{3}{n}\ .$$ [22]

La fonction $\psi_1(u)$ ne s'annulant pas lorsque $u \to 0$, le point 0 est (V)-singulier par rapport à $\psi_1(u)$; il faut donc récourir au théorème V*, ce qui donne:

$$\varrho_n^{[1]} = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

résultat bien connu de Bernstein. On peut le préciser en appliquant le théorème V**. Les fonctions $\lambda(u)$, $\mu(u)$ peuvent être choisies par exemple de la manière suivante:

$$\lambda(u) = (1-u)^+\ , \quad \mu(u) = \begin{cases} u & \text{pour } 0 \leqq u \leqq 1\ , \\ u^{-1} & \text{pour } 1 \leqq u < \infty\ . \end{cases}$$

[20] Cf. *Sz. Nagy* [1], p. 121.

[21] *Nikolsky* [1] a démontré, au lieu de cette inégalité, que ϱ_n^α ne diffère de l'expression figurant au second membre qu'à une quantité près, qui est de l'ordre de grandeur $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

[22] Démontré pour la première fois par *Alexits* [1], avec la constante 4 au lieu de 3. Cf. aussi *Sz. Nagy* [3] (variante allemande) où l'inégalité est établie avec la constante 3.

On obtient que

$$\varrho_n^{[1]} = \frac{1}{n}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left(1-\frac{2i+1}{n}\right)^{+} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).^{23}$$

Le théorème VI** fournit (par le même choix de $\lambda(u)$ et $\mu(u)$):

$$\varrho_n^{[1]\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\infty} e_{\alpha i}\left(1-\frac{2i+1}{n}\right)^{+} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{2^{\alpha}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}}{\sin t}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).^{24}$$

Dans le cas où $r > 1$, on peut appliquer les théorèmes IV**, V**, VI**, et cela en choisissant

$$\lambda(u) = u^{1-r} \text{ pour } 0 < u < \infty \text{ et } \mu(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq u \leq 1\,, \\ u^{-r} - u^{1-r} & \text{pour } 1 \leq u < \infty\,. \end{cases}$$

On obtient ainsi les résultats suivants:

$$\varrho_n^{[r]} = \frac{1}{n^r}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^{1-r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),^{25}$$

$$\varrho_n^{|r|} = \frac{1}{n^r}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^{1-r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),^{25}$$

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = \frac{1}{n^r}\sum_{i=0}^{\infty} e_{\alpha i}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^{1-r} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\infty} e_{\alpha i}\frac{1}{(2i+1)^{r-1}} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),^{26}$$

[la dernière série converge, puisque

$$e_{\alpha i} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\sin(2i+1)\,t\,dt =$$

[23] Cf. *Nikolsky* [2] ; *Sz. Nagy* [3].
[24] Cf. *Nikolsky* [*].
[25] Cf. *Nikolsky* [2], [*] ; *Sz. Nagy* [3].
[26] Cf. *Nikolsky* [*].

$$= \frac{1}{2i+1} \frac{\alpha\, 2^{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1} \cos(2i+1)t\, dt = o\left(\frac{1}{2i+1}\right)\Bigg].$$

B) *La fonction sommatoire* $\varphi(u) = 1 - u^\beta$ $(\beta > 0)$.

Lorsque $\beta < 1$, alors $\varphi(u)$ est décroissante et convexe et l'on a, tout comme dans le cas $\beta = 1$,

$$\sigma_n = 1 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_n = \frac{2}{\pi} \log n + O(1)\,.$$

Lorsque $\beta > 1$, alors $\varphi(u)$ est concave. On obtient de l'inégalité (3,1) du théorème I: $\sigma_n \leqq 2\beta - 1$. En appliquant le théorème II (et cela en observant que le point 1 n'est pas (I)-singulier), on obtient par un calcul simple, que $\bar{\sigma}_n = O(\log n)$.

On a $|d\varphi'(u)| = |\varphi''(u)|\,du = |\beta(1-\beta)\,u^{\beta-2}|\,du$. Lorsque $\beta > \alpha$, alors les hypothèses du théorème III sont vérifiées, donc

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (\beta > \alpha)\,.$$

Lorsque $\beta \leqq \alpha$, alors le point 0 est (III)-singulier. On obteint alors par le théorème III*:

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + O\left(\frac{\beta(1-\beta)}{n} \int_{\frac{1}{n}} u^{\beta-\alpha-1}\, du + \left|\frac{-\beta}{n\,.\,n^{\beta+1}} - \frac{1}{n^\beta}\right|\right) =$$

$$= \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right) & \text{pour } \beta < \alpha\,, \\ O\left(\dfrac{\log n}{n^\alpha}\right) & \text{pour } \beta = \alpha\,. \end{cases}$$

Le seul point qui peut être exceptionnel par rapport à la fonction $\psi_r(u) = u^{-r}(1-\varphi(u)) = u^{\beta-r}$, c'est $u = 0$. Mais ce point n'est (IV)-singulier que pour $\beta < r$. On a donc, par le théorème IV,

$$\varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad (\beta \geqq r)^{27}$$

et par le théorème IV*:

$$\varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r} \int_{\frac{1}{n}} u^{\beta-r-1}\, du\right) = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \qquad (\beta < r)\,.$$

[27] Démontré, pour les valeurs entières de β, par *Zygmund* [2].

Ce dernier résultat ($\beta < r$) peut être précisé en appliquant le théorème IV** (en choisissant $\lambda(u) = u^{\beta-r}$):

$$\rho_n^{[r]} = \frac{1}{n^r}\,\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^{\beta-r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^\beta}\,\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)^{r-\beta+1}} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Le point $u = 0$ n'est (V)-singulier que si $\beta \leqq r$ (dans le cas $\beta = r$ c'est la condition $\psi_r(0) = 0$ qui n'est pas remplie). On a donc, en vertu du théorème V:

$$\rho_n^{[r]} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad (\beta > r)\,.$$ [27]

Dans le cas où $\beta = r$ ou $\beta < r$, on peut appliquer le théorème V**, en choisissant $\lambda(u) = (1-u)^+$ resp. $\lambda(u) = u^{\beta-r}$:

$$\rho_n^{[r]} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^r}\,\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left(1-\frac{2i+1}{n}\right)^+ + O\left(\frac{1}{n^r}\right) & (\beta = r), \\[2ex] \dfrac{1}{n^r}\,\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left(\frac{2i+1}{n}\right)^{\beta-r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) & (\beta < r), \end{cases}$$

donc

$$\rho_n^{[r]} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\log n}{n^r} + O\left(\dfrac{1}{n^r}\right) & (\beta = r)\,,^{28} \\[2ex] \dfrac{1}{n^\beta}\,\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{r-\beta+1}} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) & (\beta < r)\,. \end{cases}$$

[Il convient de remarquer que le théorème V* ne donne, dans le cas $\beta < r$, que l'estimation $\rho_n^{[r]} = O\left(\dfrac{\log n}{n^\beta}\right)$.]

Le point $u = 0$ n'est (VI)-singulier que si $\beta \leqq r + \alpha$. On a donc, en vertu du théorème VI:

$$\rho_n^{[r]\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (\beta > r + \alpha)$$ [29]

et, en vertu du théorème VI*:

[28] L'ordre de grandeur $O\left(\dfrac{\log n}{n^r}\right)$ a été démontré aussi par *Zygmund* [2].

[29] Démontré, pour les valeurs entières de β, par *Zygmund* [2].

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{|(\beta - r)(\beta - r - 1)|}{n^{r+\alpha}} \int_{\frac{1}{n}}^{1} u^{\beta - r - \alpha - 1}\, du + \frac{1}{n^r}\left|\frac{1}{n}\frac{\beta - r}{n^{\beta - r - 1}} - \frac{1}{n^{\beta - r}}\right|\right),$$

donc

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = O\left(\frac{\log n}{n^\beta}\right) \quad (\beta = r + \alpha) \quad \text{et} \quad \varrho_n^{|r|\alpha} = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad (\beta < r + \alpha)\,.$$

Dans le cas où $\beta < r$, on obtient une estimation asymptotiquement précise par le théorème VI**, et cela en choisissant $\lambda(u) = (1 - u)^+$ lorsque $\beta = r$, et $\lambda(u) = u^{\beta - r}$ lorsque $\beta < r$:

$$\varrho_n^{|r|\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^r}\left[\dfrac{2^\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha}{\sin t}\, dt\right] + O\left(\dfrac{1}{n^{r+\alpha}}\right) & (\beta = r)\,, \\[2ex] \dfrac{1}{n^\beta}\left[\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{r-\beta+1}}\right] + O\left(\dfrac{1}{n^{r+\alpha}}\right) & (\beta < r)\,. \end{cases}$$

C) *La fonction sommatoire* $\varphi(u) = (1 - u^\beta)^\delta$ $(\beta, \delta > 0)$.

Les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi_r(u)$ se comportent, dans le voisinage de $u = 0$, comme $1 - \delta u^\beta$ resp. $\delta u^{\beta - r}$. Il s'ensuit que, à condition que de nouveaux points singuliers ne se présentent, l'allure asymptotique des grandeurs envisagées est la même que nous venons d'obtenir dans le cas particulier $\delta = 1$.

Or le seul point, outre 0, où une singularité peut avoir lieu, est le point 1. Pour des petites valeurs de $v = 1 - u$ on a:

$$\varphi(u) = [1 - (1 - v)^\beta]^\delta = [\beta v - \tbinom{\beta}{2} v^2 + \ldots]^\delta = v^\delta q(v)\,,$$

$$\varphi'(u) = v^{\delta - 1} q_1(v)\,, \quad \varphi''(u) = v^{\delta - 2} q_2(v)\,,$$

$q(v)$, $q_1(v)$ et $q_2(v)$ étant des fonctions analytiques régulières dans le voisinage de $v = 0$.

La fonction $(1 - u)\log\dfrac{1}{1 - u} \cdot (1 - u)^{\delta - 2}\,|q_2(1 - u)|$ étant intégrable dans un voisinage (au côté gauche) du point $u = 1$, ce point n'est pas (I)-singulier. *On a donc, quels que soient* β *et* δ,

$$\sigma_n = O(1) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_n = O(\log n)\,.$$ [30]

[30] Pour les moyennes de Cesàro d'ordre $\delta > 0$, apparentées à celles de M. Riesz du même ordre correspondant à la fonction sommatoire $(1 - u)^\delta$, la proposition $\sigma_n = O(1)$ a été démontrée par *Cramér* [1].

La fonction $(1-u)^{1-\alpha}.\,(1-u)^{\delta-2}\,|q_2(1-u)|$ est aussi intégrable dans un voisinage (à gauche) de $u=1$, lorsque $\delta > \alpha$; tandis que pour $\delta \leqq \alpha$, elle n'est pas intégrable.

Il s'ensuit que, dans le cas où $\delta > \alpha$, l'ordre de grandeur de ϱ_n^α ne dépend que de β, et cela de la façon déjà étudiée dans B). Par contre, dans le cas où $\delta \leqq \alpha$, le point $u=1$ est (III)-singulier. La troisième expression figurant au second membre de l'inégalité du théorème III* prend la forme:

$$O\left(\frac{1}{n^\alpha}\int^{1-\frac{1}{n}}(1-u)^{\delta-\alpha-1}\,|q_2(1-u)|\,du+\left|\frac{1}{n^\delta}\,q\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^\delta}\,q_1\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)=$$

$$=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^\delta}\right) & (\alpha > \delta)\,, \\[2ex] O\left(\dfrac{\log n}{n^\alpha}\right) & (\alpha = \delta)\,. \end{cases}$$

En comparant ces résultats avec ceux dans B), nous les pouvons résumer de la manière suivante: *Soit* $\gamma = \min(\beta, \delta)$. *On a:*

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \textit{pour} \quad \gamma > \alpha,$$

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \textit{ pour } \gamma = \alpha, \qquad \varrho_n^\alpha = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \textit{ pour } \gamma < \alpha\,.^{31}$$

Nous laissons le calcul des autres constantes d'approximation au lecteur.

D) *Sommes partielles de la série de Fourier (fonction sommatoire:* $\varphi(u) = 1$ *pour* $0 \leqq u < 1$).

La fonction $\varphi(u)$ étant discontinue au point 1, ce point est singulier au sens de tous les théorèmes. Par les théorèmes I*, II, IV* et V*:

$$\sigma_n = O(\log n)\,,\ \bar{\sigma}_n = O(\log n)\,,\ \varrho_n^{[r]} = O\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \quad \text{et} \quad \varrho_n^{\{r\}} = O\left(\frac{\log n}{n^r}\right).$$

En se servant du procédé bien connu de Jackson,[32] on en dérive que

$$\varrho_n^\alpha = O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \varrho_n^{\{r\}\alpha} = O\left(\frac{\log n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

[31] Démontré pour les valeurs $\beta = 1$ et 2 et pour $\delta \geqq \alpha$ par *Jacob* [1]. (L'auteur ne connaît cet article que du rapport publié dans les Mathematical Reviews.)

[32] Cf. *Jackson* [*], pp. 15—18.

[Les théorèmes III* et VI* ne donneraient, dans ce cas, que les estimations $\varrho_n^\alpha = O(1)$ et $\varrho_n^{|r|\alpha} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.]

E) *Fonction sommatoire :* $\varphi(u) = \cos\frac{\pi u}{2}$.

Cette fonction se comportant, dans le voisinage de $u = 0$, comme $1 - \frac{\pi^2}{8}u^2$, et comme il n'y a d'autres points exceptionnels possibles, toutes les quantités envisagées ont le même ordre de grandeur que celles correspondant à la fonction sommatoire $1 - u^2$.

F) Dans tous les exemples ci-dessus, nous avons obtenu des ordres de grandeur des deux types: $O\left(\frac{1}{n^\nu}\right)$ et $O\left(\frac{\log n}{n^\nu}\right)$. Or, ce ne sont pas les seuls types possibles. On voit par exemple, à l'aide des théorèmes IV** et V**, que les constantes $\varrho_n^{[1]}, \varrho_n^{|1|}$ correspondant à la *fonction sommatoire*

$$\varphi(u) = 1 - u \log\log\frac{e^e}{u}$$

ont respectivement l'ordre de grandeur $O\left(\frac{\log\log n}{n}\right), O\left(\frac{\log n \,.\, \log\log n}{n}\right)$, les symboles O ne pouvant pas être remplacés par o.

§ 6. GÉNÉRALISATIONS.

On peut généraliser les problèmes traités dans ce Mémoire en envisageant, au lieu des fonctions de période 2π, par exemple des fonctions presque périodiques

$$f(x) \sim \sum_\nu c_\nu(x) \qquad (c_\nu(x) = a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)$$

(ν parcourant l'ensemble dénombrable des fréquences correspondantes) ou encore des fonctions de la classe L^2 $(-\infty, \infty)$

$$f(x) \sim \int_0^\infty c_\nu(x)\, d\nu$$

(l'intégrale convergeant en moyenne vers $f(x)$, en vertu du théorème de Plancherel). Les fonctions $\sigma_n(f; x)$ sont alors à définir par leurs développements:

$$\sum_{0 \leqq \nu \leqq n} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) c_\nu(x) \quad \text{resp.} \quad \int_0^n \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) c_\nu(x)\, d\nu\ ;$$

il n'y a aucune difficulté d'admettre ici aussi des valeurs non entières pour n.

Les constantes de Lebesgue et les constantes d'approximation étant définies d'une manière analogue, les théorèmes I, III, IV, V et VI subsistent aussi pour les nouvelles classes de fonctions. En effet, la démonstration de ces théorèmes était basée sur des relations du type

$$\sigma_n(f;x) = \int_0^\infty C_\tau(v)\, f\left(x, \frac{v}{n}\right) dv\,,$$

ou

$$f(x) - \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n^r}\int_0^\infty C_\tau(v)\, f_r\left(x, \frac{v}{n}\right) dv\,,$$

relations qui restent valables aussi pour les fonctions des nouvelles classes.

Quant aux théorèmes I*, II, III*, IV*, V* et VI*, on a fait essentiellement usage dans leurs démonstrations du fait que le spectre d'une fonction de période 2π ne contient que des fréquences à valeur entière. Mais si l'on se borne, dans ces théorèmes, au cas où le seul point singulier est 0, alors il ne faut faire usage, dans la démonstration, que du fait qu'il n'y a aucun point du spectre dans l'intérieur de l'intervalle (0,1). En effet, on peut alors se servir de la fonction modifiée $\tau_n(u)$, linéaire dans $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et coïncidant avec $\tau(u)$ dans $\left(\frac{1}{n}, \infty\right)$.

Il s'ensuit que les cas particuliers de ces théorèmes, correspondant au seul point singulier 0, subsistent aussi pour les fonctions des nouvelles classes, à condition qu'on restreigne celles-ci en ne considérant que des fonctions dont le spectre n'empiète pas dans l'intérieur de l'intervalle (0,1), c'est-à-dire pour lesquelles $c_\nu(x) \equiv 0$ pour $0 < \nu < 1$.

Pour ces classes restreintes, aussi les théorèmes II*, IV** et V** subsistent, ce qu'on peut montrer en faisant usage des théorèmes de l'auteur sur les expressions trigonométriques transformées par des fonctions multiplicatrices convexes.[33]

[33] *Sz. Nagy* [2].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Achyeser, N.-Krein, M. — [1] Sur la meilleure approximation des fonctions périodiques dérivables au moyen de sommes trigonométriques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, N. s. **15** (1937), 107—111.

Alexits, G. — [1] Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), 410—422 (en langue hongroise, avec un résumé français).

Bernstein, S. — [1] Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique* (2) 4 (1912), 1—104. — [2] Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **191** (1930), 976—979.

Cramér, H. — [1] Études sur la sommation des séries de Fourier, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, **13** (1919), n° 20, 1—21.

Favard, J. — [1] Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **61** (1937), 209—224 et 243—256.

Fejér, L. — [1] Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Transactions of the American Mathematical Society*, **39** (1936), 18—59.

Fekete, M. — [1] Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **146** (1916), 88—94.

Jackson, D. — [*] The theory of approximation, *New York* (1930). — [1] Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, *Dissertation Göttingen* (1911).

Jacob, M. — [1] Über eine Anwendung der Laplace-Transformation auf die Summation Fourierscher Reihen und trigonometrischer Interpolationspolynome, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, N. s. **32** (1941), 390—394.

Kolmogoroff, A. — [1] Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, *Annals of Mathematics*, **36** (1935), 521—526.

Lebesgue, H. — [1] Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **38** (1910), 184—210.

Nikolsky, S. — [*] Approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials, *Travaux de l'Institut Mathématique Stekloff, XV* (Moscou—Léningrad, 1945). — [1] Sur l'allure asymptotique du reste dans l'approximation au moyen des sommes de Fejér des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, *Bulletin de l'Académie des Sciences de l' URSS*, 4 (1940), 501—508. — [2] Estimations of the remainder of Fejér's sum for periodical functions possessing a bounded derivative, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, **31** (1941), 210—214.

Perron, O. — [1] Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, *Mathematische Zeitschrift*, **6** (1920), 286—310.

Sz. Nagy, B. — [1] Über gewisse Extramalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, **90** (1938), 103—134. — [2] Über gewisse Extremalfragen . . . II. Nichtperiodischer Fall, *ibidem*, **91** (1939), 3—24. — [3] Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **49** (1942), 123—138 (en langue hongroise); *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **11** (1946), 71—84 (en langue allemande).

Titchmarsh, E. C. — [*] Introduction to the theory of Fourier integrals, *Oxford* (1937).

de la Vallée Poussin, C. — [*] Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, *Paris* (1909).

Zygmund, A. — [*] Trigonometrical Series, *Warszawa—Lwów* (1935). — [1] On the degree of approximation of functions by Fejér means, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **51** (1945), 274—278. — [2] The approximation of functions by typical means of their Fourier series, *Duke Mathematical Journal*, **12** (1945), 695—704.

ON FIELDS OF FORCES IN WHICH CENTRES OF GRAVITY CAN BE DEFINED.

BY JOHN ACZÉL AND STEPHEN FENYŐ (BUDAPEST).

We say that a field of forces admits a definition of a centre of gravity if, to any system of masses placed into it, a point can be determined for which the following three conditions are satisfied:

(i) The forces acting on the system have as a resultant the force which acts in the centre of gravity if we concentrate into it the entire mass of the system.

(ii) The system does not rotate around its centre of gravity. (Or with an equivalent statement: for an outer point the moment of rotation of the system is equal to the moment of rotation of the force acting on the centre of gravity.)

(iii) The centre of gravity of two points lies on the straight line connecting them.

In this paper we propose to single out the fields of forces admitting a definition of a centre of gravity in the above sense.

Let $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n$ resp. $\mathfrak{r}$ be the vectors leading from the origin to the points of the system resp. to the centre of gravity, $\mathfrak{g}(\mathfrak{r})$ the force acting on the unit mass in the endpoint of $\mathfrak{r}$. Then (i) and (ii) can be written thus[1]

$$(m_1 + \ldots + m_n)\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}) = m_1\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_1) + \ldots + m_n\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_n) \qquad (i)$$

$$[m_1\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_1) + \ldots + m_n\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_n)] \times \mathfrak{r} = (m_1 + \ldots + m_n)\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}) \times \mathfrak{r} =$$

$$= m_1\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_1) \times \mathfrak{r}_1 + \ldots + m_n\, \mathfrak{g}(\mathfrak{r}_n) \times \mathfrak{r}_n \qquad (ii)$$

for any $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n;\ m_1, m_2, \ldots, m_m$. (x denotes vector product.)

If x, y resp. x, y, z are the components of $\mathfrak{r}$ and $u(x, y)$, $v(x, y)$ resp. $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ those of $\mathfrak{g}(\mathfrak{r})$ then (i) and (ii) write *in the plane:*

$$(m_1 + \ldots + m_n)\, u(x, y) = m_1\, u(x_1, y_1) + \ldots + m_n\, u(x_n, y_n) \qquad (1)$$

$$(m_1 + \ldots + m_n)\, v(x, y) = m_1\, v(x_1, y_1) + \ldots + m_n\, v(x_n, y_n) \qquad (2)$$

[1] For a continuous mass-distribution the sums of the equalities (i.) and (ii.) are replaced by integrals and subsequent considerations are true without alteration.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k [u(x_k, y_k) y - v(x_k, y_k) x] = [u(x,y) y - v(x,y) x] \cdot \sum m_k =$$
$$= \sum m_k [u(x_k, y_k) y_k - v(x_k, y_k) x_k] \tag{3}$$

in the space:

$$(m_1 + \ldots + m_n) u(x,y,z) = m_1 u(x_1, y_1, z_1) + \ldots + m_n u(x_n, y_n, z_n) \tag{4,1}$$
$$(m_1 + \ldots + m_n) v(x,y,z) = m_1 v(x_1, y_1, z_1) + \ldots + m_n v(x_n, y_n, z_n) \tag{4,2}$$
$$(m_1 + \ldots + m_n) w(x,y,z) = m_1 w(x_1, y_1, z_1) + \ldots + m_n w(x_n, y_n, z_n) \tag{4,3}$$

$$\begin{aligned} &[u(x,y,z) y - v(x,y,z) x] \cdot \sum m_k = \\ &= \sum m_k [u(x_k, y_k, z_k) y_k - v(x_k, y_k, z_k) x_k] \end{aligned} \tag{5,1}$$

$$\begin{aligned} &[v(x,y,z) z - w(x,y,z) y] \cdot \sum m_k = \\ &= \sum m_k [v(x_k, y_k, z_k) z_k - w(x_k, y_k, z_k) y_k] \end{aligned} \tag{5,2}$$

$$\begin{aligned} &[w(x,y,z) x - u(x,y,z) z] \cdot \sum m_k = \\ &= \sum m_k [w(x_k, y_k, z_k) x_k - u(x_k, y_k, z_k) z_k] \end{aligned} \tag{5,3}$$

1. Now we solve our problem in the plane. In order to solve the general problem we restrict ourselves first to the case when all points of our mass systems lie on a straight line e of the plane.

Introducing the coördinate t on e (1.), (2.) and (3.) give

$$(m_1 + \ldots + m_n) \varphi(t) = m_1 \varphi(t_1) + \ldots + m_n \varphi(t_n) \tag{6}$$
$$(m_1 + \ldots + m_n) \psi(t) = m_1 \psi(t_1) + \ldots + m_n \psi(t_n) \tag{7}$$
$$\begin{aligned} &[m_1 \psi(t_1) + \ldots + m_n \psi(t_n)] t = (m_1 + \ldots + m_n) \psi(t) \cdot t = \\ &m_1 \psi(t_1) t_1 + \ldots + m_n \psi(t_n) t_n \end{aligned} \tag{8}$$

where $\varphi(t)$ is the component of force parallel to e, $\psi(t)$ that orthogonal to it.

Now if $\psi(t) \equiv C \neq 0$ then (7) is obviously satisfied and from (8)

$$t = \frac{m_1 t_1 + \ldots + m_n t_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

Putting this into (6)

$$\varphi\left(\frac{m_1 t_1 + \ldots + m_n t_n}{m_1 + \ldots + m_n}\right) = \frac{m_1 \varphi(t_1) + \ldots + m_n \varphi(t_n)}{m_1 + \ldots + m_n}$$

hence $\varphi(t)$ is linear:[2] $\varphi(t) = d + f t$ $\qquad (C_2, P_2)$.

[2] *G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya*, Inequalities (Cambridge, 1934). pp. 66—74.

Secondly if $\psi(t) \equiv 0$, then (7) and (8) are obvious and by (6)

$$t = \varphi^{-1}\left(\frac{m_1\varphi(t_1) + \ldots + m_n\varphi(t_n)}{m_1 + \ldots + m_n}\right)$$

This determines t uniquely if and only if $\varphi(t)$ is a continuous and strictly monotonous function(L).

Finally if $\psi(t) \not\equiv const.$ we get from (4) and (5)

$$\varphi^{-1}\left(\frac{m_1\varphi(t_1) + \ldots + m_n\varphi(t_n)}{m_1 + \ldots + m_n}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{m_1\psi(t_1) + \ldots + m_n\psi(t_n)}{m_1 + \ldots + m_n}\right)$$

hence $\varphi(t) = A \,.\, \psi(t) + B$. [2]Substituting (8) into (6)

$$\psi\left(\frac{m_1\psi(t_1)\,t_1 + \ldots + m_n\psi(t_n)\,t_n}{m_1\psi(t_1) + \ldots + m_n\psi(t_n)}\right) = \frac{m_1\psi(t_1) + \ldots + m_n\psi(t_n)}{m_1 + \ldots + m_n}\,.$$

Writing $\psi(t_k) = z_k$, $t_k = \psi^{-1}(z_k) = h(z_k)$ and multiplying by

$\dfrac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n}$ we get

$$\frac{m_1 z_1 h(z_1) + \ldots + m_n z_n h(z_n)}{m_1 + \ldots + m_n} =$$

$$= \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n}\, h\left(\frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n}\right)$$

or putting $zh(z) = f(z)$

$$\frac{m_1 f(z_1) + \ldots + m_n f(z_n)}{m_1 + \ldots + m_n} = f\left(\frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n}\right)$$

and hence[2] $zh(z) = f(z) = C + D\ \ z;\ h(z) = \dfrac{C}{z} + D$

$$\psi(t) = \frac{C}{t - D} = \frac{1}{a + b\ t}\,,\ \varphi(t) = \frac{A}{a + b\,.\,t} + B = \frac{\alpha + \beta\,t}{a + b\ t} \quad (C_1)^3$$

[3] We suppose the component are continous and monotonous. Therefore we can consider the functions φ (t), ψ (t) solutions only in the interval $-\frac{a}{b} < t < +\infty$.

Now it may happen that $A = 0$, $\varphi(t) \equiv B$ but in this case $\psi\left(-\frac{a}{b}\right) = \infty, \varphi\left(-\frac{a}{b}\right) = B$ [4] hence the only possible value for B is 0, and so $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = \frac{1}{a + b\ t}$. If on the other hand $A \neq 0$, $B = 0$ then

$$\varphi(t) = \frac{A}{a+bt}, \psi(t) = \frac{1}{a+bt} \qquad (P_1)$$

Thus the solutions of our restricted problem in the plane (all masses on the straight line e) are

Central fields: C_1 and C_2

$$C_1: \varphi(t) = A\frac{1}{a+bt} + B = \frac{\alpha + \beta t}{a+bt}\ ; \psi(t) = \frac{1}{a+bt}$$

$$; A \neq 0, B \neq 0, \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1}{\alpha + \beta t}.$$

The direction of any force points towards the point $\left(-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right)$ the „source" of the field. For $t = -\frac{a}{b}$, $\varphi(t) = \infty$, $\psi(t) = \infty$. The magnitude of the force

$$|\mathfrak{g}(t)| = \frac{\beta}{b}\frac{\sqrt{\left(t+\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2}}}{t + \frac{a}{b}}$$

is proportional to the ratio of the distance from the source and the distance from the point $t = -\frac{a}{b}$ where $|\mathfrak{g}(t)| = \infty$ (or to its distance from any straight line going through $t = -\frac{a}{b}$). . $\psi(t) \neq 0$ i. e. the force can not lie parallel to e.

$C_2: \varphi(t) = d + f\,t$, $\psi(t) = c; f \neq 0, c \neq 0; \frac{\psi}{\varphi} = \frac{c}{d + f\,t}$.

The source of the field is the point $\left(-\frac{d}{f}, \frac{c}{f}\right)$. The forces do not become infinite in any finite point. Their end points lie on a line parallel to e in

[4] If one component of a vector becomes infinite, the other must become infinite too with the only exeption when it is zero.

distance c, hence their magnitude is proportional to the distance from the source. Since $\psi(t) \neq 0$ the forces are not parallel to e.

Parallel fields: P_1 and P_2

$$P_1 : \varphi(t) = \frac{\alpha}{a + bt} ; \psi(t) = \frac{1}{a + b \cdot t} ; b \neq 0 ; \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1}{\alpha} .$$

The forces are parallel to each otherw ithout being parallel to e. They become infinite for $t = -\frac{a}{b}$, everywhere else they are inversely propor tional to the distance from any straight line going across $t = -\frac{a}{b}$. If $\alpha = 0$, the forces are all orthogonal to e.

$P_2 : \varphi(t) = d,\ \psi(t) = c$

The field is homogeneous, the forces are parallel and constant.

Linear field: L: $\varphi(t)$ continous and strictly monotonous, $\psi(t) = 0$. The forces lie in the direction of e and owing to monotony of $\varphi(t)$ do become infinite in at most one point.

If the force is nowhere infinite, then we find us in one of the case C_2 or P_2 (eventually L), if the force becomes infinite in one point we have to do with C_1 or P_1 (eventually L). If it is infinite in two points, so it is infinite on the whole straight line connecting them. This occurs when C_1 or P_1 degenerates to $a = 0$, $b = 0$.

2. Let us pass to the general case in the plane. The forces are either parallel or else their directions point towards a common point 0 (central field.). Proof: By the above results the forces acting on a straight line e (if they are not parallel) have a point 0 as a sorce. In the points Q_1, Q_2 lying on e the force has the direction of the straight lines q_1 resp. q_2 passing through 0 and Q_1 resp. 0 and Q_2 and thus for q_1 and q_2 only the case L can hold: in any other point of these straight lines the force lies in their direction so in particular in the points of intersection Q_1' and Q_2' with any other straight line e'. But in this case the direction of all forces acting on e' goes through 0. *qu. e. d.*

In case of a central field (ii) is satisfied spontaneously if we take the source 0 for origin, as then $\mathfrak{g}(\mathfrak{r}) \parallel \mathfrak{r}$.

a) If the field is central and the force does not become infinite in any point then for any straight line not going through the source 0, the case C_2 must hold. Thus on any line of this kind the forces are proportional to the distance from 0 but as the ratio of proportionality is the same for two intersecting straight lines it is constant throughout the whole plane. Hence taking 0 for origin the field has the form:

C. II. $$u(x, y) = l \, . \, x, \; v(x, y) = l \, . \, y; \; g(r) = l \, . \, r.$$

b) On the other hand if the field is central but there exists a point R_1 in which the force becomes infinite, then there must be a second point R_2 of the same kind. For if on every straight line which does not go though 0 and R_1 the force would remain finite then on these straight lines C_2 would hold and so we had to do again with case *C. II.* Therefore the force would not be infinite in any point of the plane. On the straight line d connecting R_1 and R_2 the force is infinite everywhere but remains finite in any point S lying outside d. For in the opposite case it would be infinite on any straight line going through S and intersecting d and hence on the whole plane. On every straight line not going through 0 and not parallel to d, C_1 holds and therefore the force is proportional to the ratio of distances taken from 0 and d. The ratio of proportionality is again constant on any two intersecting straight lines and hence on the whole plane. Let us take the straight line going through 0 and orthogonal to d for X-axis and D denote the length of perpendicular dropped from 0 on d. According to whether we chose for origin 0 or the point of intersection of d and X we have

C. I. $$u(x, y) = \frac{l \, . \, x}{x + D}; \; v(x, y) = \frac{l \, . \, y}{x + D}$$

o. r. $$u(x, y) = \frac{l\,(x - D)}{x}; \; v(x, y) = \frac{l\,y}{x}$$

c) If the forces are parallel and do not become infinite in any point of the plane, then on any straight line not parallel to the forces P_2 holds. The force is constant on every such line and hence (as the constant is the same for two intersecting lines) constant on the whole plane. The field is parallel and homogeneous:

P. II. $$u(x, y) = d, \; v(x, y) = c.$$

d) If the forces are parallel and there exists a point R_1 in which the force is infinite, then there exists also a second point R_2 of the same kind for otherwise on every line not passing through R_1 the case P_2 would hold, i. e. the force had to be constant throughout the whole plane (case P. II.). On the straight line d connecting R_1 and R_2 and only there the force is infinite just as in the case *C. I.* and thus on every straight line not parallel to the forces or to d the case P_1 holds. The magnitude of the forces is inversely proportional to the distance from d. The ratio of proportionality is the same for two intersecting straight lines and thus for the whole plane. If we chose d for Y-axis:

P. I. $$u(x,y) = \frac{l}{x}, \; v(x,y) = \frac{k}{x}.$$

By substituting the above formulas into (1), (2), (3), we get the coördinates of the centre of gravity of our system of masses:

In cases C. I. and P. I.

$$x = \frac{m_1 + \ldots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \ldots + \frac{m_n}{x_n}}; \; y = \frac{\frac{m_1 y_1}{x_1} + \ldots + \frac{m_n y_n}{x_n}}{\frac{m_1}{x_1} + \ldots + \frac{m_n}{x_n}},$$

in cases C. II. and P. II. [considering (iii)]

$$x = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n}; \; y = \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

SUMMARY.

The plane fields of forces can be of the following types.

C. I. The forces point towardsa source *0* and are infinite on a straight line *d*. Their magnitude is proportional to the ratio of the distance from *0* and the distance from *d*. The points in which the forces have the same magnitude lie on conic sections with focus *0* and directrix *d*.

C. II. The forces point towards a source *0* and their magnitude is proportional to their distance from *0*. Equal forces lie on circles around *0* as centre.

P. I. The forces are parallel and become infinite on *d*. Elsewhere they are inversely proportional to the distance from *d*. Equal forces lie on parallels to *d*.

P. II. Homogeneous field. The forces are all equal and parallel.[5]

In the cases *C. I.* and *P. I.* the position of centre of gravity is invariant for translatorial motions parallel to *d* and for affine transformations having the centre of affinity on *d*. In the cases *C. II.* and *P. II.* the position of the centre of gravity is invariant for every motion and affinity of the plane.

[5] In the cases C. I. and P. I. we define the forces only in that half of the plane *devided* by d in which *0* lies.

In physics besides $P.\ II.$ (homogeneous field) $C.\ II.$ is to be met with, in the case of elastic forces. Hence for elastic forces a centre of gravity exists and may be constructed in the same way as for a homogeneous field.

3. Our arguments hol for fields in the space without alteration. It is only the line d that has to be replaced by a plane d on which the forces become infinite. In the case $C.\ I.$ equal forces lie on rotation surfaces of conic sections having 0 for focus and the plane d for directrix, in $C.\ II.$ on spheres around 0, in case $P.\ I.$ on planes parallel to d. Case $P.\ II.$ is again the homogeneous field.

In this case too the proof starts from the restricted case in which the masses lie on a straight line. Instead of (6), (7), (8), we get from (4,1)—(5,3)

$$\varphi(t)\sum m_k = \sum m_k\varphi(t_k);\ \psi(t)\sum m_k = \sum m_k\psi(t_k);\ \chi(t)\sum m_k =$$
$$= \sum m_k\chi(t_k)\ t\sum m_k\psi(t_k) = \sum m_k\psi(t_k)\cdot t_k;\ t\sum m_k\chi(t_k) =$$
$$= \sum m_k\chi(t_k)\,t_k.$$

If we compare these equalities and apply the above methods, we get in the not degenerated case that

$$\varphi(t) = \frac{\alpha+\beta t}{a+bt};\ \psi(t) = \frac{A}{a+bt};\ \chi(t) = \frac{1}{a+bt}.$$

The source of the field is the point $O\left(-\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{A}{\beta};\ \frac{1}{\beta}\right)$, the force becomes infinite at $t = -\frac{a}{b}$ and its magnitude is proportional to the ratio of the distance from 0 and the distance from any plane going through the point $t = -\frac{a}{b}$. Herafter we may conclude as for the plane field.

A szerkesztésért Egerváry Jenő, a kiadásért Szent-Györgyi Albert felelős.

48.248 — Egyetemi Nyomda, Budapest. (F : Tirai Richárd.)

CONTENTS